

présentée devant l'UNIVERSITE de NANTES

pour obtenir le grade de

par

Gilles COEURDEUIL

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE MECANIQUE



CONTRIBUTION A L'ETUDE DES SYSTEMES COMMANDES HIERARCHIQUEMENT ET APPLICATION A UN GENERATEUR DE VAPEUR

Soutenue le 10 juin 1975 devant la Commission d'Examen

M. MEZENCEV **Président**

M. PERRET

M. LE CORRE **Examineurs**

M. CHENEVEAUX

UNIVERSITE DE NANTES

Président : M. SPARFEL - Pharmacie -

Liste des enseignants des disciplines scientifiques :

Professeurs	M. BRILLOUET	Mathématiques
	M. PAUC	«
	M. PETRESCO	«
	M. RAFFIN	«
	M. PIRONNEAU (ENSM)	Mécanique
	M. RAVILLY (ENSM)	«
	M. TARDY (ENSM)	«
	M. AVIGNON	Physique
	M. BOULLLOUD	«
	M. COLLET	«
	M. MINN	«
	M. MEZENECV (ENSM)	«
	M. MOUTON	«
	Melle OFFREY (ENSM)	«
	M. DUNOYER	Chimie
	M. GRAFF	«
	M. MARTIN	«
	M. PIERI	«
	M. QUINIOU	«
	M. ROUXEL	«
	M. WOJTKOWIAK	«
	M. GARRIGUES	Biologie
	Mme LE DOUARIN	«
	M. LE DOUARIN	«
	M. SELLIER	«
	M. CAVET	Sciences de la Terre
	M. FORESTIER	«
Professeurs associés	M. BRARD (ENSM)	Mécanique
Professeurs sans chaire	M. FOUQUES	Mathématiques
	M. IBISCH	«
	M. LEBORGNE	«

Professeurs sans chaire	M. BARDON	Physique
	M. CAILLER (IUT Nantes)	"
	M. GOUREAUX	"
	M. LASKAR	"
	M. LE NAOUR	"
	M. ROSIER	"
	M. BOUCHY (IUT Nantes)	Chimie
	M. CHABANEL	"
	M. GOBIN (ENSM)	"
	M. POINTEAU (ENSM)	"
	M. TOURNOUX	"
	M. DUPONT	Biologie
	M. SAUDRAY	"
	M. OTTMANN	Sciences de la Terre

Maîtres de Conférences	M. DHOMBRES	Mathématiques
	M. DO (ENSM)	"
	M. GAPAILLARD	"
	M. GATESOUE	"
	M. LAMEAU (ENSM)	"
	M. PHAN-THE-LAI (Chargé d'Enseignement)	"
	M. VOGEL	"
	M. DUBIGEON (Chargé d'Enseignement IUT)	Mécanique
	M. GUEVEL (ENSM)	"
	M. SULMONT (ENSM)	"
	M. VAUSSY (ENSM)	"
	M. VILAINE (ENSM)	"
	M. LE BIHAN	Physique
	M. LE CORRE (ENSM)	"
	M. LE MAITRE	"
	M. LONCKE	"
	M. THOMAS (IUT Nantes)	"
	M. LE MAITRE (ENSM)	Chimie
	Mme MARTIN	"
	M. AMOURIQ	Biologie
	M. LEBRUN	"
	Mme NICOLAS-PRATT	"
	M. NICOLAS	Sciences de la Terre

Secrétaire Général : M. LERAY

AVANT-PROPOS

Le présent travail a été effectué au Laboratoire d'Automatique de l'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique que dirige Monsieur le Professeur MEZENCEV. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude pour l'intérêt et les encouragements qu'il m'a toujours prodigués.

Que Monsieur le Professeur PERRET, dont les activités à l'Institut Polytechnique de Grenoble sont très proches des nôtres, sache combien je suis sensible à l'honneur qu'il me fait en acceptant de juger cette thèse.

Que Monsieur LE CORRE, Maître de Conférence à l'E.N.S.M., soit assuré de ma reconnaissance pour avoir bien voulu participer à mon jury.

Je tiens également à remercier chaleureusement Monsieur CHENEVEAUX qui m'a permis de mener à bien ce travail grâce à ses précieux conseils.

J'adresse mes remerciements à l'équipe de Techniciens du Laboratoire et tout particulièrement à Messieurs BARRE et BELLAVOIR dont l'assistance au cours des expériences a été sans défaut.

Et je ne saurais oublier dans ces remerciements tous mes Collègues enseignants et chercheurs pour la chaleur de leur camaraderie et Mesdames LEMAIRE et POTIRON qui ont bien voulu dactylographier ce fascicule.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555012_0016

SOMMAIRE

	Pages
INTRODUCTION	1
Chapitre 1 - GENERALITES SUR LA COMMANDE HIERARCHISEE -	5
1 - POSITION DU PROBLEME	5
1.1 - Buts de la hiérarchisation	5
1.2 - Principe de la hiérarchisation	6
1.2.1 - Notations	6
1.2.2 - Décomposition	6
2 - COMMANDE HIERARCHISEE QUADRATIQUE	7
2.1 - Introduction	7
2.2 - Position du problème global	8
2.2.1 - Solution globale	9
2.2.2 - Solution globale dans le cas d'un critère à horizon très grand ou à horizon fuyant	10
2.3 - Problème du premier niveau - Optimisation locale	11
2.3.1 - Décomposition en sous-systèmes	11
2.3.2 - Optimisation des sous-systèmes - Critère à horizon fuyant	12
2.4 - Coordination	13
2.5 - Avantages de la méthode	14
Bibliographie du Chapitre 1	16
Chapitre 2 - ETUDE DE LA STABILITE D'UN SYSTEME MULTIVARIABLE PAR UNE METHODE FREQUENTIELLE -	17
1 - POSITION DU PROBLEME	17
1.1 - Notations	18
1.2 - Mise en équations	18
1.3 - Fonctions de transfert caractéristiques	19
1.4 - Lieux caractéristiques	20
1.5 - Exemple	20

2 - STABILITE	22
2.1 - Théorème fondamental pour la stabilité d'un système multivariable bouclé	22
2.2 - Stabilité en utilisant les lieux caractéristiques	23
2.3 - Indefectibilité des systèmes multivariables	24
2.4 - Exemple	26
3 - APPLICATION AUX SYSTEMES MULTIVARIABLES REPRESENTES PAR DES EQUATIONS D'ETAT	29
3.1 - Mise en équations	29
3.2 - Exemple	31
3.2.1 - Calcul de $G(s)$	31
3.2.2 - Calcul de la matrice $K(s)$	31
3.3 - Application à l'étude de la stabilité d'un système commandé hiérarchiquement	35
Bibliographie du Chapitre 2	39
Chapitre 3 - INTRODUCTION D'UNE COMMANDE DU TYPE "PROPORTIONNEL ET INTEGRAL" -	41
1 - BUTS ET CALCUL D'UNE COMMANDE "PROPORTIONNELLE ET INTEGRALE"	41
1.1 - Limitations de la commande "proportionnelle"	41
1.2 - Calcul de la commande "proportionnelle et intégrale"	43
2 - OBSERVABILITE ET COMMANDABILITE DU SYSTEME ELARGI	45
2.1 - Observabilité	45
2.2 - Condition nécessaire de commandabilité	46
2.3 - Condition nécessaire et suffisante de commandabilité	47
2.3.1 - Système mono-entrée	47
2.3.2 - Système multidimensionnel	49
3 - APPLICATION A LA COMMANDE HIERARCHISEE	50
Bibliographie du Chapitre 3	52

Chapitre 4 - APPLICATION A LA COMMANDE EN TEMPERATURE ET EN PRESSION D'UN GENERATEUR DE VAPEUR -	53
1 - DESCRIPTION DU PROCESSUS ET DU MATERIEL DE COMMANDE	53
1.1 - Processus	53
1.2 - Matériel de commande	54
2 - MODELE ET CRITERE	55
2.1 - Modèle	55
2.1.1 - Equation de pression au ballon	55
2.1.2 - Equation de pression de sortie	55
2.1.3 - Equation de température de sortie	56
2.1.4 - Intégrateurs sur les sorties	56
2.1.5 - Résultats de l'identification	57
2.2 - Critère	57
2.3 - Equations matricielles	58
3 - SOLUTION GLOBALE OPTIMALE	60
3.1 - Calcul des termes constants de la commande	61
3.2 - Solution globale optimale	62
4 - DECOMPOSITION	63
4.1 - Principe	63
4.2 - Régulation en pression	64
4.3 - Régulation en température	65
5 - TRANSFORMATION DU SYSTEME BOUCLE SOUS FORME DE MATRICES DE TRANSMITTANCES	65
5.1 - Calcul de la matrice $G(s)$	66
5.2 - Calcul de la matrice de régulation $K(s)$	67
Bibliographie du Chapitre 4	70
Chapitre 5 - RESULTATS -	71
1 - ORGANIGRAMME DU PROGRAMME DE COMMANDE	71
1.1 - Commande manuelle	71
1.2 - Commande locale	71

1.3 - Commande globale	71
2 - COMMANDE AVEC UN INTEGRATEUR SUR CHAQUE SORTIE EN LOCAL	73
2.1 - Etude de la stabilité en local par la méthode des lieux caractéristiques	73
2.2 - Essais en simulation	73
2.3 - Essais en réel	73
3 - COMMANDE AVEC UN INTEGRATEUR SUR UNE SEULE SORTIE EN LOCAL	78
3.1 - Intégrateur sur la pression seulement en local	78
3.2 - Intégrateur sur la température seulement en local	82
3.2.1 - Lieux caractéristiques	82
3.2.2 - Essais en réel	83
Bibliographie du Chapitre 5	92
CONCLUSION	93
ANNEXE 1	97
ANNEXE 2	103
ANNEXE 3	105
ANNEXE 4	107

INTRODUCTION

Parmi toutes les méthodes de l'Automatique moderne pour le traitement des processus multivariables, la plus séduisante est sans doute l'optimisation quadratique des systèmes linéaires ou linéarisés. En effet connaissant le modèle mathématique du processus sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{u} \\ \underline{y} = \underline{C}\underline{x} \end{cases}$$

et en lui appliquant un critère de fonctionnement quadratique

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (\underline{y}^T \underline{Q} \underline{y} + \underline{u}^T \underline{R} \underline{u}) dt \quad t_1 \text{ fixé}$$

il est possible de calculer une commande unique minimisant le critère sans faire aucune hypothèse sur la structure de celle-ci. De plus, si le critère est à horizon fuyant, c'est-à-dire s'il a pour bornes d'intégration t , $t+T$ et en l'absence de contrainte, il est possible d'exprimer la commande $\underline{u}$ par un bouclage sur l'état $\underline{u} = \underline{K}\underline{x}$ où $\underline{K}$ est une matrice à coefficients constants déterminée en intégrant à rebours une équation de Riccati depuis l'instant T jusqu'à l'instant 0. Dans ces conditions, on peut calculer la matrice $\underline{K}$ et donc mettre en place cette régulation multivariable sans utiliser de calculateur en ligne.

Mais de graves problèmes pratiques vont se poser lorsque la taille du système augmente : l'équation de commande $\underline{u} = \underline{K}\underline{x}$ faisant intervenir tous les états, dès que se produit un fonctionnement anormal comme une panne de capteur ou une intervention extérieure (démarrage, commande manuelle...) tout le système de commande devient inutilisable. Pour faire face à ces diverses éventualités, on est obligé de doubler la commande globale par des régulations classiques ce qui entraîne un coût supplémentaire important.

Le but de la commande hiérarchisée sera donc de réaliser un compromis entre ces deux types de régulation en s'inspirant de ce qui se passe dans l'organisation de toute tâche collective humaine. Dès que la taille des travaux à effectuer devient trop importante, il n'est plus possible qu'un organisme directeur s'intéresse à l'activité propre de chacun. On décompose et on limite alors les tâches de chaque employé et la direction doit alors contrôler et décider en fonction des résultats de chaque subordonné.

Dans le cas de la commande hiérarchisée, nous aurons donc au niveau le plus bas à réaliser une décomposition en sous-systèmes, afin que chacun assure des tâches simples à l'aide de régulations locales proches des régulations classiques. Cette décomposition entraînant des "interactions" entre les sous-systèmes, il faudra au deuxième niveau coordonner les différentes parties de façon que globalement le travail de l'ensemble soit satisfaisant.

Pour calculer les commandes locales et le coordinateur, nous avons appliqué dans un premier temps la commande optimale quadratique en utilisant notamment une décomposition du critère pour le calcul des régulateurs du premier niveau. Cependant l'intérêt d'une telle structure résidant dans la possibilité de fonctionner même quand un défaut apparaît dans l'un des composants du système et en particulier quand le coordinateur doit être déconnecté, deux problèmes vont se poser si on détermine les régulations locales de cette manière :

- Si on néglige dans la décomposition du premier niveau les interactions, le système bouclé localement risque d'être instable. Nous avons alors été amenés à introduire une étude de la stabilité due au professeur MAC FARLANE, qui est une généralisation du critère de Nyquist au cas multivariable. Entre autres cette méthode présente l'avantage de pouvoir vérifier si les régulations locales sont indéfectibles, c'est-à-dire si elles restent stables en présence d'incidents. Nous pouvons donc vérifier a priori si le coordinateur peut être déconnecté et si nous pouvons laisser en marche les commandes locales des chaînes où ne sont pas produits d'incidents.

- D'autre part, les interactions négligées peuvent être considérées comme des perturbations inconnues et vont donc introduire des erreurs statiques. Afin de les annuler et donc de rendre le système bouclé localement plus précis, nous avons placé sur les sorties, comme le conseillent MM. FOND et FOULARD des intégrateurs qui transforment nos commandes locales en régulateurs du type "proportionnel et intégral".

En fait, nous verrons que ces deux problèmes sont étroitement liés, car si nous introduisons tous les intégrateurs possibles sur les sorties, nous rendrons le système précis en supprimant effectivement les erreurs statiques mais en même temps nous diminuons le degré de stabilité. Il nous faudra donc réaliser un compromis entre ces deux notions en déterminant le nombre d'intégrateurs qu'on peut introduire grâce à l'étude de la stabilité par méthode fréquentielle. Dès lors nous constatons que l'emploi de sous-critères quadratiques pour la détermination des commandes locales n'est absolument pas un impératif

puisque nous sommes obligés de nous interroger sur la structure des régulations et nous considérerons cette méthode plus comme un moyen de calcul que comme une étape importante dans la détermination d'une commande hiérarchisée.

Ces techniques ont été mises en oeuvre sur le processus pilote du laboratoire d'Automatique de l'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique. Celui-ci est constitué d'une chaudière marine à deux entrées : le débit de combustible et le débit d'eau de désurchauffe, et deux sorties : la pression et la température de sortie. Elle est représentée par un modèle mathématique dont le vecteur d'état a cinq composantes.

Cette application met en lumière deux intérêts fondamentaux de la commande hiérarchisée :

- Pour les calculs hors lignes en utilisant des algorithmes déjà éprouvés et permettant d'adopter la structure de régulation du premier niveau la plus stable et la plus fiable.

- Pour la commande en ligne en ayant à la fois les qualités de la commande optimale quadratique en marche normale et les avantages des régulations de type classique du premier niveau permettant de démarrer le processus simplement et de faire face à toutes les éventualités telles que pannes de capteurs ou passage en commande manuelle sur une chaîne.

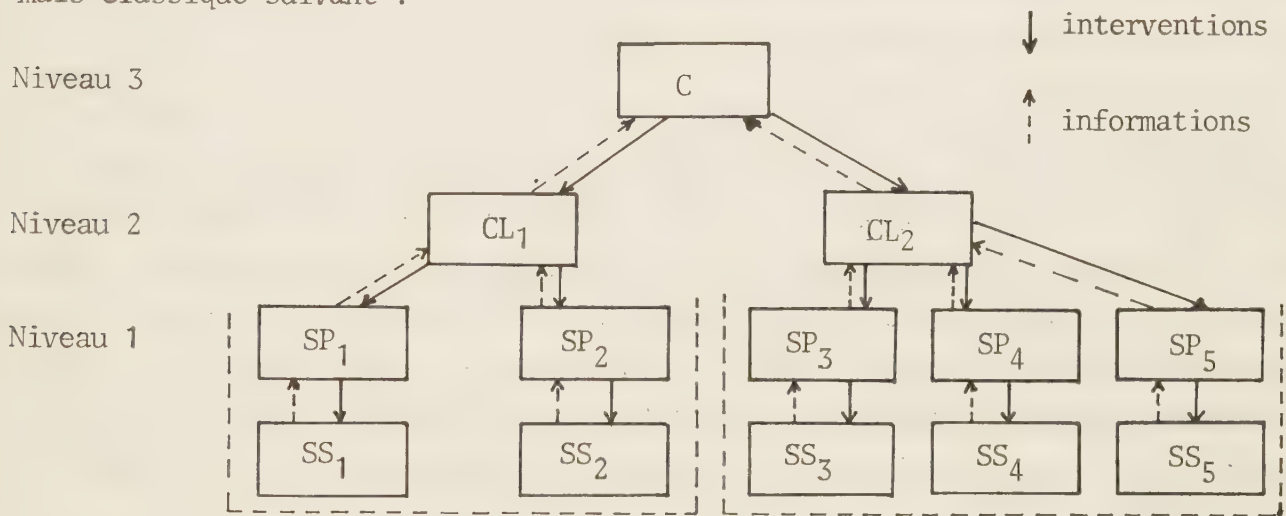
Chapitre 1

GENERALITES SUR LA COMMANDE HIERARCHISEE

1 - POSITION DU PROBLEME

1.1 - Buts de la hiérarchisation

Considérons la commande d'un processus de grande dimension. Nous pouvons opérer sur celui-ci une division horizontale représentée par le schéma désormais classique suivant :



Niveau 1 : Le système global est décomposé en "sous-systèmes" SS_i auxquels sont associés des "régulateurs locaux" appelés SP_i . Ceux-ci renvoient à leur supérieur hiérarchique situé au niveau 2 des informations lui permettant de juger leur travail.

Niveau 2 : Constitue ce qu'on appelle le "coordinateur". En fonction des informations fournies par les régulateurs locaux, il détermine les actions d'intervention permettant de tenir compte des interactions existant entre les différents sous-systèmes. Nous avons ici deux coordinateurs locaux CL_1 et CL_2 .

Niveau 3 : C'est le coordinateur final C qui va assurer l'optimisation globale du système. Il joue le même rôle que le Niveau 2 mais cette fois-ci pour l'ensemble du système.

Dans ces conditions, les objectifs souhaitables de la commande hiérarchisée sont les suivants :

* Avoir une information de plus en plus dépouillée et significative lorsqu'on remonte la pyramide.

** Obtenir des interventions de plus en plus précises et faciles à élaborer lorsqu'on va du niveau 3 vers le niveau 1.

*** Que les interventions des niveaux 2 et 3 soient les moins fréquentes possibles. Ceci permettra aux calculateurs chargés de les calculer d'être libres plus souvent et donc, s'ils travaillent en temps partagé, d'avoir des possibilités considérablement accrues pour effectuer d'autres tâches.

**** Que les "*régulations locales*" assurent seules (c'est-à-dire en l'absence de toute coordination) un fonctionnement correct du processus et ceci aussi bien en cas d'arrêt des coordinateurs qu'en cas de panne de l'un des organes de mesure ou de commande. En effet si nous voulons que les niveaux 2 et 3 interviennent le moins souvent possible et assurent un démarrage chaîne par chaîne, il faudra que les régulations locales seules soient suffisamment précises et stables. D'autre part, lorsqu'un incident se produira, la coordination sera automatiquement coupée afin de ne pas introduire les fausses informations provenant de la chaîne en panne sur celles qui ne le sont pas. Dans ces conditions, il faudra pour ne pas passer en commande manuelle sur toutes les chaînes, que les régulations locales des sous-systèmes où ne se sont pas produits d'incidents assurent malgré tout un fonctionnement stable.

En fait nous verrons que la méthode que nous allons utiliser ne permet pas de satisfaire les deux premiers points car nous aboutissons à une équation de coordination aussi compliquée que lorsqu'on applique directement la commande globale.

1.2 - Principe de hiérarchisation

1.2.1 - Notations

Nous appellerons : $\underline{x}$ vecteur de variables non manipulables
 $\underline{u}$ vecteur de variables manipulables

Ces deux vecteurs étant reliés par la relation :

$$F(\underline{x}, \underline{u}) = 0 \text{ caractérisant le système}$$

le problème est alors de minimaliser par rapport à $\underline{u}$ un critère $J(\underline{x}, \underline{u})$ en respectant $F(\underline{x}, \underline{u}) = 0$.

1.2.2 - Décomposition

Afin de ne pas alourdir les explications, nous nous bornerons au cas de deux sous-systèmes, ces explications étant facilement généralisables.

Nous effectuerons une première décomposition de $\underline{x}$ et de $\underline{u}$ de la façon suivante :

$$\underline{x} = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{vmatrix} \quad \text{avec} \quad \underline{x}_1 = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{vmatrix} \quad \underline{x}_2 = \begin{vmatrix} x_{p+1} \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix}$$

$$\underline{u} = \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \end{vmatrix}$$

Dans ces conditions, la relation qui lie $\underline{x}_i$ et $\underline{u}_i$ sera notée $F_i(\underline{x}_i, \underline{u}_i) = 0$ et la partie du critère qui ne contient que $\underline{x}_i$ et $\underline{u}_i$ sera appelée J_i .

Le cas le plus fréquent qui se produira sera le suivant :

$J = J_1 + J_2$: les sous critères sont purement additifs ce qui est facile à concevoir puisqu'en général c'est l'utilisateur qui choisit le critère.

F est équivalent à $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ et $F_{12} = 0$

$F_{12} = 0$ représentant les interactions existant entre les deux sous-systèmes.

On dira alors qu'il y a "INTERACTION DE MODELE"

Bien que ce cas soit relativement rare, il peut y avoir aussi "INTERACTION DE CRITERE" avec :

$$J = J_1 + J_2 + J_{12}$$

C'est-à-dire qu'il existe une partie du critère qui ne peut pas se séparer entre le sous-critère du sous-système S_1 et le sous-critère du sous-système S_2 .

Mais quel que soit le type d'interaction, la méthode qui paraît la plus séduisante pour calculer le bouclage dans le cas de cette décomposition semble être la commande hiérarchisée quadratique que nous allons voir maintenant.

2 - COMMANDE HIERARCHISEE QUADRATIQUE

2.1 - Introduction

Ainsi que nous l'avons vu précédemment, la commande hiérarchisée se propose de commander un système complexe par "niveaux".

Pour se faire, nous devons déterminer pour le premier niveau des régulateurs simples et indépendants les uns des autres. La première idée est de les calculer en utilisant l'optimisation quadratique appliquée aux différents sous-ensembles considérés comme indépendants, c'est-à-dire sans tenir compte des interactions qui peuvent exister entre eux. Il faut toutefois signaler dès à présent que cette façon de procéder peut conduire à deux défauts. D'une part, si ces interactions sont trop importantes, les régulations locales risquent de ne plus être stables ; d'autre part, nous pouvons les assimiler à des perturbations à valeur moyenne non nulle qui vont provoquer du statisme. Nous verrons comment étudier ces problèmes dans les deux chapitres suivants.

La régulation "*globale*" assurée par le coordinateur sera déterminée en utilisant aussi l'optimisation quadratique mais cette fois-ci appliquée à l'ensemble du système. Le rôle du coordinateur sera alors de corriger chaque régulation locale pour assurer un fonctionnement optimal de tout l'ensemble. Nous allons donc voir l'aide que peut nous apporter la théorie de l'optimisation quadratique mais en ayant toujours à l'esprit l'objectif suivant :

Nous devons pouvoir à tout moment stopper l'action du coordinateur et être néanmoins certain que les régulations locales seront capables d'assurer seules un fonctionnement suffisamment précis et stable de tout le système.

De plus, nous devons être capable de piloter en manuel un des sous-systèmes alors que les autres continuent à être commandés par les régulations locales.

2.2 - Position du problème global

Nous supposons que le processus global est décrit par une équation d'état dynamique :

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u} + \underline{w} \quad (1.1)$$

$\underline{x}$: vecteur d'état de dimension n

$\underline{u}$: vecteur de commande de dimension r

$\underline{w}$: perturbation d'état connue de dimension n

A : matrice $n \times n$

B : matrice $n \times r$

et une équation de sortie :

$$\underline{y} = C\underline{x} + \underline{v} \quad (1.2)$$

$\underline{y}$: vecteur de sortie de dimension m

$\underline{v}$: perturbation de sortie connue de dimension m

C : matrice $m \times n$

Dans ces conditions on cherche la commande $\underline{u}$ qui minimise le critère :

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} |(\underline{z}-\underline{y})^T Q(\underline{z}-\underline{y}) + \underline{u}^T R \underline{u}| dt$$

t_0 et t_1 fixés

$\underline{z}$: vecteur de consigne de dimension m

$\underline{e} = \underline{z} - \underline{y}$ est donc le vecteur d'écart de la sortie par rapport à la consigne.

2.2.1 - Solution globale

Afin de déterminer le coordinateur nous devons d'abord calculer la commande optimale globale.

L'Hamiltonien s'écrit :

$$H = \frac{1}{2} |(\underline{z}-\underline{y})^T Q(\underline{z}-\underline{y}) + \underline{u}^T R \underline{u}| + \underline{p}^T |A\underline{x} + B\underline{u} + \underline{w}|$$

La commande optimale sans contrainte est telle que $H_{\underline{u}} = 0$

$$H_{\underline{u}} = R\underline{u} + B^T \underline{p} = 0 \quad \underline{u} = -R^{-1} B^T \underline{p} \quad (1.4)$$

La solution en $\underline{p}$ est telle que $\dot{\underline{p}} = H_{\underline{x}}$

$$\text{Donc } \dot{\underline{p}} = C^T Q(\underline{z}-\underline{y}) + A^T \underline{p} \quad (1.5)$$

D'après (1.2) $\underline{y} = C\underline{x} + \underline{v}$ si nous reportons dans (1.5) nous

obtenons :

$$\dot{\underline{p}} = C^T Q(\underline{z}-\underline{v}) - A^T \underline{p} - C^T Q C \underline{x} \quad (1.6)$$

On a donc à résoudre le système canonique suivant :

$$\begin{cases} \dot{\underline{p}} = C^T Q(\underline{z}-\underline{v}) - A^T \underline{p} - C^T Q C \underline{x} \\ \dot{\underline{x}} = A \underline{x} - B R^{-1} B^T \underline{p} + \underline{w} \end{cases} \quad (1.7)$$

avec les conditions aux limites $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$ donné et $\underline{p}(t_1) = 0$

Le système (1.7) étant linéaire, la solution sera de la forme

$$\underline{p} = K \underline{x} - \underline{g} \quad (1.8)$$

Si nous reportons (1.8) dans le système (1.7) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{p}} &= (\dot{K} + K A - K B R^{-1} B^T K) \underline{x} + K B R^{-1} B^T \underline{g} + K \underline{w} - \dot{\underline{g}} \\ &= (-A^T K - C^T Q C) \underline{x} + C^T Q(\underline{z}-\underline{v}) + A^T \underline{g} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Cette égalité étant vraie quel que soit $\underline{x}$ on a donc :

$$\dot{K} = -K A - A^T K + K B R^{-1} B^T K - C^T Q C \quad \text{Matrice de Riccati} \quad (1.10)$$

$$\text{avec } K(t_1) = 0 \quad (1.11)$$

et

$$\dot{\underline{g}} = -(A^T - KBR^{-1}B^T)\underline{g} - C^TQ(\underline{z}-\underline{v}) + K\underline{w} \quad (1.12)$$

avec $\underline{g}(t_1) = 0$ (1.13)

et la commande sera alors :

$$\underline{u} = -R^{-1}B^T(K\underline{x} - \underline{g}) \quad (1.14)$$

Nous pouvons dès à présent faire deux remarques au niveau de cette commande globale :

- * Elle est fonction de tous les états du système, de toutes les perturbations déterministes $\underline{w}$ et $\underline{v}$ et de toutes les consignes. La solution obtenue est optimale et donc stable dans le cas des critères à horizon infini ($t_1 \rightarrow \infty$) ou fuyant ($t_0 = t$ et $t_1 = t + T$), cas que nous allons étudier dans le paragraphe suivant. Mais on ne peut rien dire en cas de défaillance d'une commande ou d'une mesure.
- ** Il est donc indispensable de maintenir des régulations locales en vue d'assurer un fonctionnement de secours d'une part, et d'autre part, afin de permettre un démarrage sous-système par sous-système. La commande hiérarchisée devrait apporter une solution élégante à ce problème.

2.2.2 - Solution globale dans ce cas d'un critère à horizon très grand ou à horizon fuyant

L'horizon infini correspond au cas où le critère intégral présente la forme $\int_{t_0}^{t_1}$ avec $t_1 \rightarrow \infty$ et l'horizon fuyant à $\int_t^{t+T}$. De plus nous formulerons les hypothèses suivantes :

- $\underline{w}$ = perturbation sur l'état connue et constante
- $\underline{v}$ = perturbation sur la sortie connue et constante
- $\underline{z}$ = consigne connue et constante

Dans ces conditions les relations donnant la commande optimale se simplifient considérablement.

La matrice de bouclage K est constante ainsi que le vecteur $\underline{g}$ qui s'exprime sous la forme d'une combinaison linéaire de $\underline{w}$, $\underline{v}$ et $\underline{z}$.

La matrice de bouclage K devient alors le régime permanent de l'équation de Riccati et doit donc vérifier :

$$-KA - A^TK + KBR^{-1}B^TK - C^TQC = 0 \quad (1.15)$$

l'équation d'état s'écrit alors :

$$\dot{\underline{x}} = (A - BR^{-1}B^TK)\underline{x} + BR^{-1}B^T\underline{g} + \underline{w} \quad (1.16)$$

et $\underline{g}$ est donné par

$$\dot{\underline{g}} = (A - BR^{-1}B^TK) \underline{g} - C^TQ(\underline{z} - \underline{v}) + K\underline{w} \quad (1.17)$$

On montre alors [1.2] que le vecteur $\underline{g}$ tend vers une constante. Dans ces conditions, $\dot{\underline{g}} = 0$ et

$$\underline{g} = -[(A - BR^{-1}B^TK)^T]^{-1} (C^TQ(\underline{z} - \underline{v}) + K\underline{w}) \quad (1.18)$$

Que l'on peut mettre sous la forme :

$$\underline{g} = G(\underline{z} - \underline{v}) + H\underline{w} \quad (1.19)$$

2.3 - Problème du premier niveau - Optimisation locale

2.3.1 - Décomposition en sous-systèmes

De la même façon que précédemment nous allons décomposer en deux sous-systèmes seulement pour faciliter l'exposé.

L'équation d'état du système sera décomposée comme suit :

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\underline{x}}_1 \\ \dot{\underline{x}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{w}_1 \\ \underline{w}_2 \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

$\underline{x}_1$ et $\underline{w}_1$: vecteurs de dimension n_1

$\underline{x}_2$ et $\underline{w}_2$: vecteurs de dimension n_2 avec $n_1 + n_2 = n$

$\underline{u}_1$: vecteur de dimension r_1

$\underline{u}_2$: vecteur de dimension r_2 avec $r_1 + r_2 = r$

Les matrices A_{12} , A_{21} , B_{12} et B_{21} constituent les "matrices d'interaction". Le découpage sera donc fait dans la mesure du possible de manière que ces différentes matrices aient une influence faible vis-à-vis de A_{11} , A_{22} , B_{11} et B_{22} , c'est-à-dire que les régulations locales seront stables si elles sont calculées en négligeant ces matrices de couplage. Nous verrons plus loin comment étudier ce problème.

Nous décomposerons de la même façon l'équation de sortie :

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

$$\underline{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad \underline{e} = \begin{bmatrix} z_1 - y_1 \\ z_2 - y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

$\underline{y}_1$, $\underline{z}_1$, $\underline{e}_1$ = vecteurs de dimension m_1

$\underline{y}_2$, $\underline{z}_2$, $\underline{e}_2$ = vecteurs de dimension m_2 avec $m_1 + m_2 = m$

Afin de ne pas augmenter les problèmes d'interaction, il est important de choisir une décomposition telle que la sortie de chaque sous-système ne dépende que des états de ce sous-système, donc d'avoir $c_{12} = c_{21} = 0$. Lorsque ce ne sera pas possible, on devra donc choisir le découpage de façon que physiquement les couples entrée-sortie de chaque sous-système soient les plus vraisemblables. Il faut noter que ce problème n'a pas encore été résolu de façon satisfaisante et que lorsque les conditions citées plus haut ne sont pas respectées, seul l'aspect physique du problème particulier traité permet pour l'instant de choisir les sous-systèmes.

La décomposition des états et des sorties conduit à la décomposition du critère en deux sous-critères à condition qu'il n'y ait aucun terme rectangle. Nous nous imposerons donc des matrices Q et R telles que :

$$Q = \begin{vmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & Q_{22} \end{vmatrix} \quad R = \begin{vmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & R_{22} \end{vmatrix} \quad (1.23)$$

Nous aurons alors des sous-critères additifs de la forme :

$$J = J_1 + J_2$$

avec $J_1 = \frac{1}{2} \int_t^{t+T} (\underline{e}_1^T Q_{11} \underline{e}_1 + \underline{u}_1^T R_{11} \underline{u}_1) d\tau \quad (1.24)$

Ce qui est le cas le plus fréquent car on veut pondérer les écarts de régulation par rapport aux commandes et entre eux ce qui conduit à des matrices Q et R diagonales. On peut cependant remarquer que cette décomposition peut-être appliquée si un terme rectangle figure dans le critère, celui-ci serait pris alors en charge par la coordination.

2.3.2 - Optimalisation des sous -systèmes - Critère à horizon fuyant

Nous nous placerons désormais dans le cas du critère à horizon fuyant que nous utiliserons toujours par la suite.

Le problème du premier niveau est de résoudre le système à valeurs limites :

$$\dot{\underline{x}}_i = A_{ii}\underline{x}_i + B_{ii}\underline{u}_i + \underline{\dot{w}}_i \quad (1.25)$$

$$\underline{y}_i = C_{ii}\underline{x}_i + \underline{v}_i \quad (1.26)$$

$$\underline{u}_i = -R_{ii}^{-1} B_{ii}^T \underline{p}_i + \underline{v}_i \quad (1.27)$$

$$\dot{\underline{p}}_i = -C_{ii}^T Q_{ii} C_{ii} \underline{x}_i - A_{ii}^T \underline{p}_i + C_{ii}^T Q_{ii} (\underline{z}_i - \underline{v}_i) + \underline{\dot{p}}_i \quad (1.28)$$

ce qui conduit à déterminer K_i et $\underline{g}_i^0$ tels que :

$$\underline{u}_i = -R_{ii}^{-1} B_{ii}^T (K_i \underline{x}_i - \underline{g}_i^0) \quad (1.29)$$

Sachant que $\underline{w}_i^0$, $\underline{v}_i^0$ et $\underline{\rho}_i^0$ représentent les interactions au niveau de l'état et de la commande.

Dans ces conditions on démontre que [1.3] [1.4] :

- (i) La matrice de bouclage K_i ne dépend pas des interactions. Elle peut-être calculée une fois pour toute et assure au sous-système un fonctionnement localement optimal et stable quand les interactions sont nulles.
- (ii) Le vecteur $\underline{g}_i^0$, vecteur d'entrée de la boucle fermée, dépend des interactions.

En fait nous allons agir un peu différemment :

Supposons d'abord que les interactions sont nulles, on peut alors définir les sous-problèmes de la même façon que le problème global :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}_i = A_{ii} \underline{x}_i + B_{ii} \underline{u}_i + \underline{w}_i \end{cases} \quad (1.30)$$

$$\underline{z}_i = C_{ii} \underline{x}_i + \underline{v}_i \quad (1.31)$$

$$J_i = \frac{1}{2} \int_t^{t+T} [\underline{e}_i^T Q_{ii} \underline{e}_i + \underline{u}_i^T R_{ii} \underline{u}_i] d\tau \quad (1.32)$$

$$\text{ce qui conduit à } \underline{u}_i^* = -R_{ii}^{-1} B_{ii}^T [K_i \underline{x}_i - \underline{g}_i^*] \quad (1.33)$$

K_i régime permanent de l'équation de Riccati.

$\underline{g}_i^*$ défini à partir de $\underline{w}_i$, $\underline{v}_i$ et $\underline{z}_i$ et qui n'est pas le vecteur optimal $\underline{g}_i^0$

$$\underline{g}_i^* = G_i (\underline{z}_i - \underline{v}_i) + H_i \underline{w}_i \quad (1.34)$$

avec

$$G_i = -[(A_{ii} - B_{ii} R_{ii}^{-1} B_{ii}^T K_i)^T]^{-1} C_{ii}^T Q_{ii} \quad (1.35)$$

$$H_i = +[(A_{ii} - B_{ii} R_{ii}^{-1} B_{ii}^T K_i)^T]^{-1} K_i \quad (1.36)$$

$\underline{u}_i^*$ représente donc ici la commande du sous-système isolé et la coordination se traduira par l'addition d'un terme $\underline{h}_i$ à cette commande.

2.4 - Coordination

La façon la plus simple de l'obtenir est de calculer la différence entre la valeur optimale $\underline{u}_i$ et la commande du sous-système isolé $\underline{u}_i^*$.

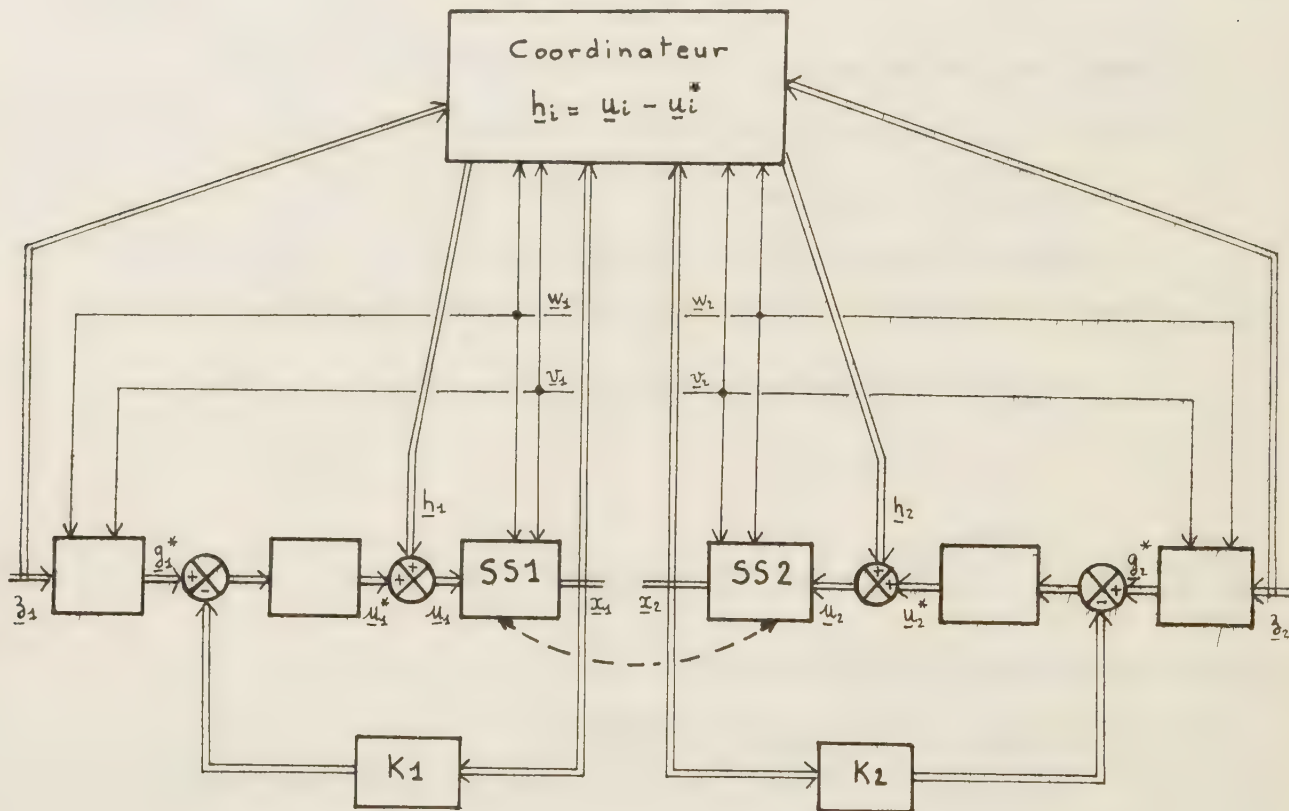
Si nous avons par exemple découpé en deux sous-systèmes, nous avons :

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \end{bmatrix} = -R^{-1} B^T [K \underline{x} - \underline{g}] \quad (1.37)$$

La coordination sera alors :

$$\underline{h}_i = \underline{u}_i - \underline{u}_i^* \quad (1.38)$$

Le schéma général de la commande hiérarchisée sera donc le suivant :



2.5 - Avantages de la méthode

Grâce à sa structure hiérarchisée, ce système de commande optimale permet d'assurer :

- * Le démarrage de chaque sous-système par une régulation locale sans coordination ($\underline{h}_i = 0$). Chaque sous-système est alors sous-optimal du point de vue du comportement global du système et peut contenir les systèmes classiques de commutation : commande manuelle - commande automatique.

** Après le démarrage en régulation locale, la commande optimale quadratique globale est assurée grâce à la coordination qui tient compte des interactions entre les différents sous-systèmes.

*** En cas de défaillance d'une mesure ou d'une commande sur un sous-système, on peut repasser en commande manuelle sur celui-ci et en régulation locale sur les autres après avoir arrêté la coordination ($\underline{h}_i = 0$)

On a donc un fonctionnement qui permet d'assurer un maximum de sécurité pour la conduite d'une grande unité industrielle.

Au niveau des avantages matériels, la meilleure solution semble être une commande hybride :

- * Les régulations locales sont des régulations analogiques équivalentes à des régulations classiques mais dont les paramètres sont calculés à partir de l'optimisation quadratique.
- ** La coordination sera effectuée par un calculateur numérique de petite taille car elle aura été préalablement calculée hors ligne dans le cas où l'on utilise un critère à horizon fuyant. Le rôle du calculateur numérique sera donc, d'une part, de fournir la coordination avec une fréquence qui devrait être relativement faible, et d'autre part, d'assurer les commutations nécessaires en cas de défaillance.

BIBLIOGRAPHIE

- | | | |
|-----|-------------------------------|---|
| 1-1 | MESAROVIC, MARKO,
TAKAWARA | "A general theory of hierarchical,
multilevel systems"
Academic Press, 1971. |
| 1-2 | ATHANS, FALB | "Optimal Control"
Mc. Graw Hill, 1966. |
| 1-3 | CHENEVEAUX B. | "Synthesis of a multivariable control
system via multilevel techniques"
IFAC, Dusseldorf, October 1971. |
| 1-4 | CHENEVEAUX B. | "Contribution à l'optimisation hié-
rarchisée des systèmes dynamiques"
Thèse de Docteur-Ingénieur, E.N.S.M.,
Nantes, avril 1972. |
| 1-5 | ABDALLAH A. | "Régulation quadratique optimale"
Thèse de Docteur-Ingénieur, E.N.S.M.,
Nantes, décembre 1971. |

Chapitre 2

ETUDE DE LA STABILITE D'UN SYSTEME MULTIVARIABLE PAR UNE METHODE FREQUENTIELLE

1 - POSITION DU PROBLEME

Ainsi que nous l'avons vu, si nous voulons appliquer la commande hiérarchisée, la méthode la plus facile à mettre en oeuvre consiste à décomposer le système en plusieurs sous-systèmes et à calculer sur chacun une commande optimale quadratique sans tenir compte des interactions qui existent entre eux.

L'inconvénient apparaît tout de suite : si ces interactions, à condition qu'elles constituent des bouclages, sont assez importantes, ces régulations risquent de ne plus être stables.

Prenons, par exemple, un système représenté par les équations :

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \end{vmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$$

Les régulations locales, si on néglige les interactions, seront calculées à partir des 2 sous-systèmes :

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1 \\ y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} u_1$$
$$\begin{vmatrix} \dot{x}_2 \\ y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & d \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} u_2$$

On s'aperçoit dès lors que, les coefficients de couplages b et c n'intervenant pas, on peut très bien avoir suivant leurs valeurs un système stable ou non. Nous allons donc rechercher une méthode permettant de savoir dans quelle mesure il est possible de négliger les couplages entre sous-systèmes et finalement d'évaluer quel sera le meilleur type de régulation locale.

Pour cela, nous utiliserons une technique mise au point par le professeur Mc FARLANE [2-1], [2-2], [2-3], [2-4] pour étudier la stabilité d'un système multivariable représenté par des matrices de transmittances en s et qui est une généralisation du critère de Nyquist aux systèmes multivariables.

1.1 - Notations

Nous adopterons les notations suivantes tout en prévenant dès à présent le lecteur que la liaison entre transformée en s et équations d'état pour la représentation d'un système sera faite au paragraphe 3.

$G(s)$ $\equiv$ matrice de fonctions de transfert du système de dimensions $m \times r$

$K(s)$ $\equiv$ matrice de fonctions de transfert des régulations de dimensions $r \times m$

$\underline{r}(s)$ $\equiv$ transformée de Laplace du vecteur de référence de dimensions m

$\underline{e}(s)$ $\equiv$ transformée de Laplace du vecteur d'erreur de dimensions m

$\underline{u}(s)$ $\equiv$ transformée de Laplace du vecteur de commande de dimensions r

$\underline{y}(s)$ $\equiv$ transformée de Laplace du vecteur de sortie de dimensions m

$R(s)$ $\equiv$ matrice de fonctions de transfert du système bouclé de dimensions $m \times m$

I_m $\equiv$ matrice unité de dimensions $m \times m$

Avec ces notations, le système bouclé pourra être représenté par la figure 2-1

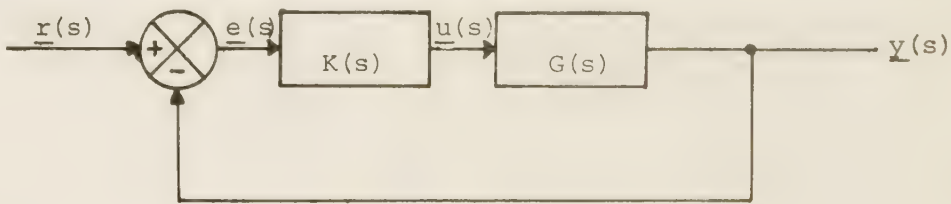


figure 2-1

que l'on peut encore représenter schématiquement par :

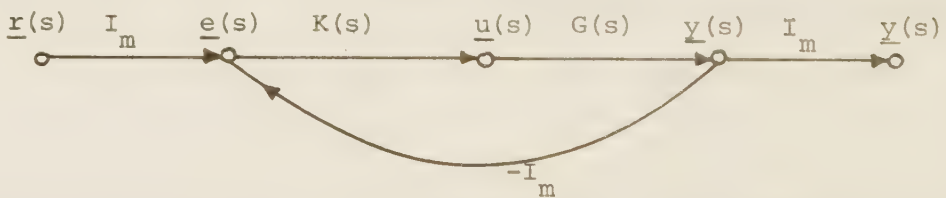


figure 2-2

1.2 - Mise en équations

$$\underline{y}(s) = Q(s) \underline{e}(s) \quad (2-1)$$

où $\underline{Q}(s) = G(s) \cdot K(s)$ (2-2)

qui constitue la matrice de fonctions de transfert en boucle ouverte.

Lorsqu'on ferme la boucle, on obtient :

$$\underline{y}(s) = R(s) \cdot \underline{r}(s) \quad (2-3)$$

avec $R(s) = [I_m + Q(s)]^{-1} Q(s)$ (2-4)

$R(s)$ étant la matrice de fonctions de transfert en boucle fermée.

Nous appellerons $F(s) = I_m + Q(s)$ (2-5)

la matrice de fonctions de transfert qui permet de trouver la transformée de Laplace de la différence entre un signal injecté à la sortie et ce qu'il est devenu après avoir effectué la boucle.

Cette matrice $F(s)$ est une généralisation de la fonction scalaire équivalente introduite par Bode [2-5].

On démontre alors que : [2-1], [2-4], [Annexe 1],

$$\det F(s) = |F(s)| = \frac{\text{Polynôme caractéristique en boucle fermée}}{\text{Polynôme caractéristique en boucle ouverte}} = \frac{PCBF(s)}{PCBO(s)} \quad (2-6)$$

Afin de pouvoir étudier la stabilité d'un tel système, nous allons maintenant introduire la notion de fonctions de transfert caractéristiques dont nous aurons besoin par la suite.

1.3 - Fonctions de transfert caractéristiques

Considérons une matrice carrée $Q(s)$ de dimensions $(m \times m)$ de fonctions de variables complexes. Pour chaque valeur de s dans un certain domaine Ω , $Q(s)$ est une matrice de valeurs complexes. Elle a alors un ensemble de valeurs propres :

$$q_i(s) \quad i = 1, 2, \dots, m$$

de telle sorte que pour un s donné :

$$q_i(s) \in C \quad C \text{ ensemble des nombres complexes}$$

Les valeurs propres de $Q(s)$ sont obtenues en résolvant l'équation caractéristique :

$$\det |Q(s) - q \times I| = 0$$

qui peut encore être mise sous la forme : $g(s, q) = 0$

Les valeurs propres $q_i(s)$ sont les m solutions de cette équation algébrique et sont telles que :

$$q_i(s) = \alpha_i(s) + j \theta_i(s)$$

Or, dans un domaine fermé Ω du plan complexe ne contenant pas de point singulier de la fonction algébrique $g(s, q)$, ces fonctions $q_i(s)$ forment un ensemble de m fonctions holomorphes distinctes.

Ces fonctions holomorphes seront appelées fonctions de transfert caractéristiques de $Q(s)$, ceci afin d'éviter toute confusion avec le terme valeur propre employé usuellement.

1.4 - Lieux caractéristiques

Dans la pratique, nous n'aurons pas besoin des expressions explicites de ces fonctions de transfert caractéristiques (qui sont très difficiles ou impossibles à calculer) mais de leurs réponses fréquentielles que nous appellerons lieux caractéristiques.

Nous les obtiendrons point par point en utilisant la procédure suivante :

- (a) Prenons une valeur particulière de pulsation ω_a
- (b) Calculons la matrice complexe $Q(j\omega_a)$
- (c) Calculons à l'aide d'un programme standard les valeurs propres de $Q(j\omega_a)$ qui vont constituer un ensemble de nombres complexes notés $q_i(j\omega_a)$
- (d) Tracer ces nombres $q_i(j\omega_a)$ dans le plan complexe
- (e) Répéter les quatre opérations précédentes pour des valeurs de la pulsation $\omega_b, \omega_c, \omega_d, \dots$ etc.

Ainsi, pour une matrice carrée $Q(s)$ on obtient les lieux caractéristiques $\{q_i(j\omega), i = 1, 2, \dots, m\}$ tracés dans le plan complexe et gradués en valeurs de pulsation.

1.5 - Exemple

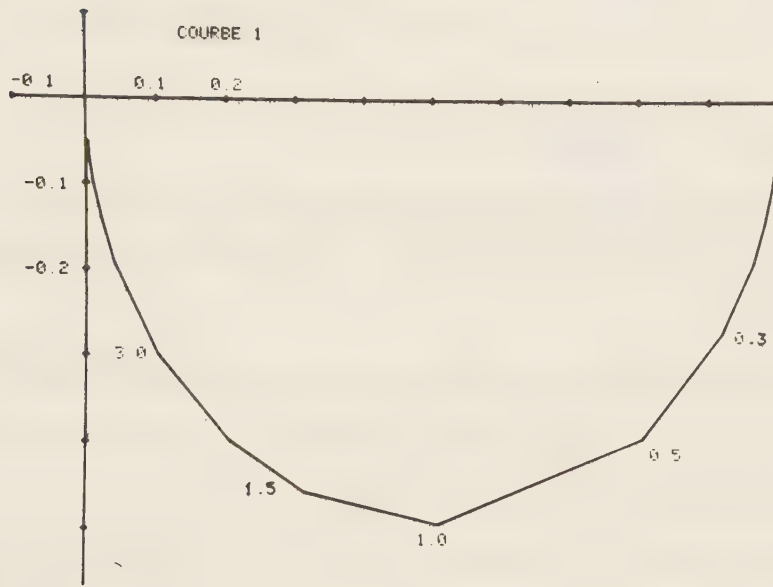
Si nous prenons comme exemple un système dont la matrice $Q(s)$ est :

$$Q(s) = \begin{vmatrix} \frac{s+5}{s^2+8s+7} & \frac{2}{s^2+8s+7} \\ \frac{4}{s^2+8s+7} & \frac{s+3}{s^2+8s+7} \end{vmatrix}$$

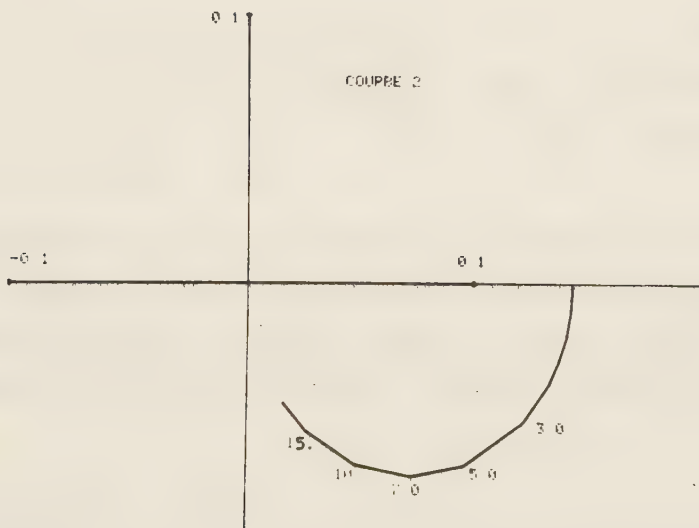
On peut tracer les lieux caractéristiques $q_1(j\omega)$ et $q_2(j\omega)$ représentés sur la figure 2-3 à l'aide de la procédure énoncée plus haut. Ces lieux sont obtenus à l'aide d'un calculateur numérique EAI 640 puis tracés sur une console de visualisation TEKTRONIX.

Sur cet exemple précis, on pourra vérifier facilement que ces lieux caractéristiques ont pour équation :

$$q_1(s) = \frac{1}{s+7} \quad q_2(s) = \frac{1}{s+1}$$



$q_1(j\omega)$



$q_2(j\omega)$

Figure 2.3

2 - STABILITE

L'étude de la stabilité est directement liée à la relation (2.6) :

$$\det F(s) = \frac{PCBF(s)}{PCBO(s)}$$

avec : $PCBF(s)$ = polynôme caractéristique du système en boucle fermée
 $PCBO(s)$ = polynôme caractéristique du système en boucle ouverte

2.1 - Théorème fondamental pour la stabilité d'un système multivariable bouclé

Ce théorème est en fait une généralisation du critère de Nyquist dans le cas multivariable en étudiant le lieu de $\det F(s)$.

Considérons le contour classique de Nyquist (D) dans le plan complexe représenté pour la figure 2.4 décrit dans le sens des aiguilles d'une montre. Il est constitué, d'une part, par l'axe imaginaire de $-jR$ à $+jR$ et, d'autre part, par un demi-cercle dans le demi-plan droit de rayon R centré sur l'origine.

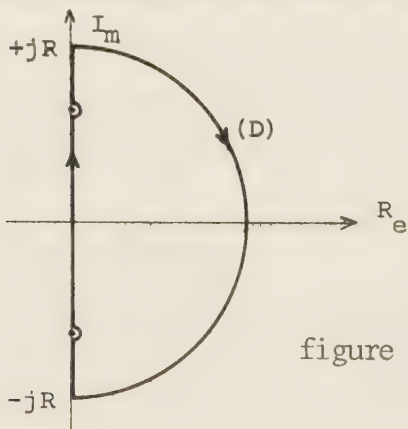


figure 2-4

R est choisi suffisamment grand pour que (D) contienne tous les pôles et zéros de $\det F(s)$ situés dans le demi-plan droit (pôles et zéros à partie réelle positive). D'autre part (D) est construit de telle sorte qu'il ne contient pas les pôles et zéros de $\det F(s)$ situés sur l'axe imaginaire.

Alors, si $\det F(s)$ transforme (D) en un lieu Γ_f qui entoure l'origine dans le plan complexe n_f fois dans le sens contraire des aiguilles d'une montre et si p_o et p_c sont respectivement le nombre de zéros à partie réelle positive des polynômes caractéristiques en boucle ouverte et en boucle fermée, on a :

$$n_f = p_o - p_c \quad (2.)$$

Pour avoir une stabilité absolue, il faut que p_c soit nul. La condition nécessaire et suffisante de stabilité en boucle fermée est donc :

$$n_f = + p_o \quad (2.)$$

Le théorème de stabilité est donc :

<< Un système multivariable en boucle fermée est stable si, et seulement si, la transformée Γ_f du contour de Nyquist (D) dans la transformation conforme défini

par $\det F(s)$ encercle l'origine dans le sens contraire des aiguilles d'une montre autant de fois qu'il y a de zéros à partie réelle positive du polynôme caractéristique en boucle ouverte >>.

2.2 - Stabilité en utilisant les lieux caractéristiques

Considérons un système multivariable en boucle fermée avec sa matrice associée : $F(s) = I_m + G(s).K(s)$, matrice carrée d'ordre m .

Soit $f_i(s)$, $i = 1, 2, \dots, m$ les fonctions de transfert caractéristiques de $F(s)$. On a alors :

$$\det F(s) = \prod_{i=1}^m f_i(s) \quad (2.9)$$

Supposons maintenant que chaque fonction de transfert caractéristique transforme le contour (D), défini au paragraphe précédent, en un lieu Γ_{f_i} , $i = 1, 2, \dots, m$, dans le plan complexe, et que chaque Γ_{f_i} entoure l'origine n_{f_i} fois dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. De l'équation (2.9), on peut alors déduire :

$$\sum_{i=1}^m n_{f_i} = n_f \quad (2.10)$$

Compte tenu de l'équation (2.8) le système bouclé est stable si, et seulement si :

$$\sum_{i=1}^m n_{f_i} = + p_0 \quad (2.11)$$

Nous allons maintenant essayer d'exprimer une condition nécessaire et suffisante de stabilité en utilisant l'équation (2.11) et les fonctions de transfert caractéristiques non plus de $F(s)$ mais de la matrice de fonctions de transfert en boucle ouverte $Q(s) = G(s).K(s)$.

Nous savons que : $F(s) = I_m + Q(s)$

Si nous appelons $q_i(s)$ $i = 1, 2, \dots, m$ les fonctions de transfert caractéristiques de $Q(s)$, la relation liant $f_i(s)$ et $q_i(s)$ sera donc :

$$f_i(s) = 1 + q_i(s) \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.12)$$

Si $q_i(s)$ transforme (D) en un lieu Γ_{t_i} , ce lieu fera donc autant de tours dans le sens contraire des aiguilles d'une montre autour du point critique $(-1, 0)$ que le lieu Γ_{f_i} autour de l'origine.

Dans ces conditions, compte tenu de l'équation (2.11), on obtient :

$$\sum_{i=1}^m n_{t_i} = + p_0 \quad (2.13)$$

Le théorème devient alors :

<< Un système multivariable en boucle fermée est stable si, et seulement si, la somme algébrique des tours de tous les lieux caractéristiques de la matrice de fonctions de transfert en boucle ouverte autour du point critique $(-1,0)$ dans le sens contraire des aiguilles d'une montre est égal au nombre p_0 de zéros à partie réelle positive du polynôme caractéristique en boucle ouverte >>.

2.3 - Indéfectibilité des systèmes multivariables

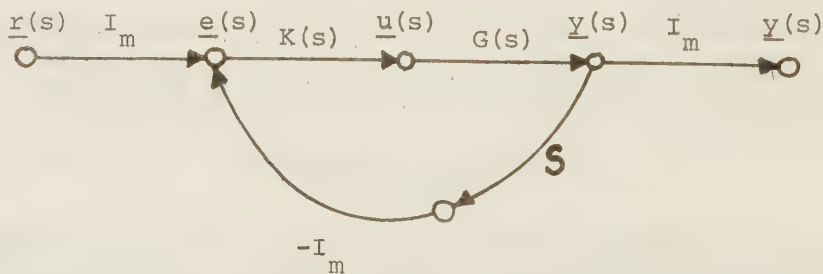
Pour la commande des systèmes multivariables, il est important de vérifier la stabilité de l'ensemble du système lorsqu'un ou plusieurs organes tombent en panne. Ceci est d'autant plus important dans le cas de la commande hiérarchisée car nous voulons qu'en cas de panne on puisse arrêter la coordination, passer en manuel sur la chaîne défectueuse et conserver sur les autres les régulations locales qui permettront d'assurer un fonctionnement stable de celles-ci sans intervention humaine.

Ceci nous amène tout naturellement à définir la notion d'indéfectibilité :

<< Un système multivariable est indéfectible s'il reste stable en présence des pannes les plus probables qui peuvent se produire >>.

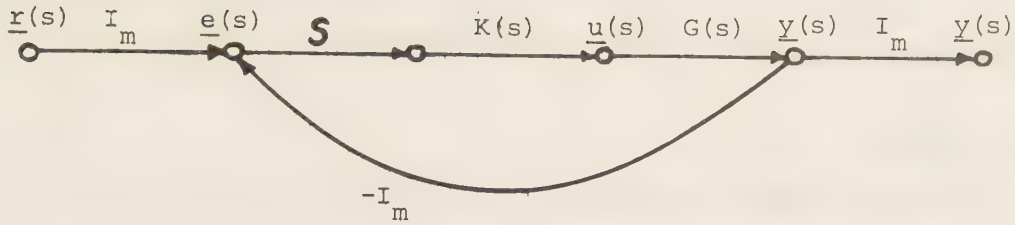
Pour étudier ce problème, définissons une matrice diagonale S ayant ses éléments égaux à 1 pour les lignes fonctionnant normalement et à ϵ quantité arbitrairement petite pour les lignes en panne.

Les différents cas de pannes pouvant se produire sont alors représentés par les figures suivantes :



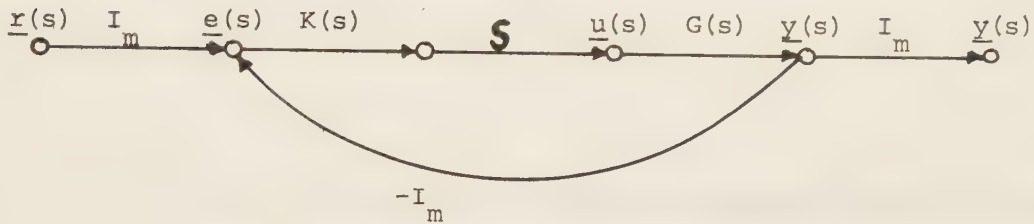
Panne dans la boucle de retour

Figure 2.5



Panne dans la transmission ou le calcul de l'écart

Figure 2.6



Panne dans la transmission de la commande

Figure 2.7

Dans ces trois cas, les matrices de fonctions de transfert en boucle fermée sont :

$$R_1 = |I_m + G(s) K(s) S|^{-1} G(s) K(s) \quad \text{figure 2.4}$$

$$R_2 = G(s) K(s) S |I_m + G(s) K(s) S|^{-1} \quad \text{figure 2.5}$$

$$R_3 = G(s) S |I_r + K(s) G(s) S|^{-1} K(s) \quad \text{figure 2.6}$$

D'une façon analogue à celle adoptée au début de ce chapitre, nous allons définir des matrices $Q(s)$:

$$Q_1(s) = G(s) K(s) \quad \text{pour les figures 2.4 et 2.5} \quad (2.14)$$

$$Q_3(s) = K(s) G(s) \quad \text{pour la figure 2.6} \quad (2.15)$$

On démontre alors le théorème d'indéfectibilité suivant [2.3] ;

[Annexe 2] :

<< Un système multivariable bouclé est indéfectible vis-à-vis de tous les cas de pannes décrits par les figures 2.4, 2.5, et 2.6 si, et seulement si, les sous-matrices principales des matrices $Q_1(s)$ et $Q_3(s)$ satisfont le critère de Nyquist défini par l'équation (2.13) >>.

Les sous-matrices principales étant les matrices obtenues en rayant une ou plusieurs lignes et colonnes de même numéro.

2.4 - Exemple

Soit un système multivariable représenté par la matrice $G(s)$ et sur lequel on applique un retour unitaire :

$$G(s) = \begin{vmatrix} \frac{s+5}{s^2+8s-1} & \frac{4}{s^2+8s-1} \\ \frac{4}{s^2+8s-1} & \frac{s+3}{s^2+8s-1} \end{vmatrix}$$

$$K(s) = I$$

le polynôme caractéristique en boucle ouverte a pour racines 0.123 et -8.123. Il y a donc une racine à partie réelle positive, donc :

$$p_0 = 1$$

Si on trace les lieux caractéristiques de $Q(s)$ et par conséquent de $G(s)$ puisque $K(s) = I$, on obtient la figure 2.8(rappelons que le lieu pour les ω négatifs est obtenu par symétrie par rapport à l'axe des réels).

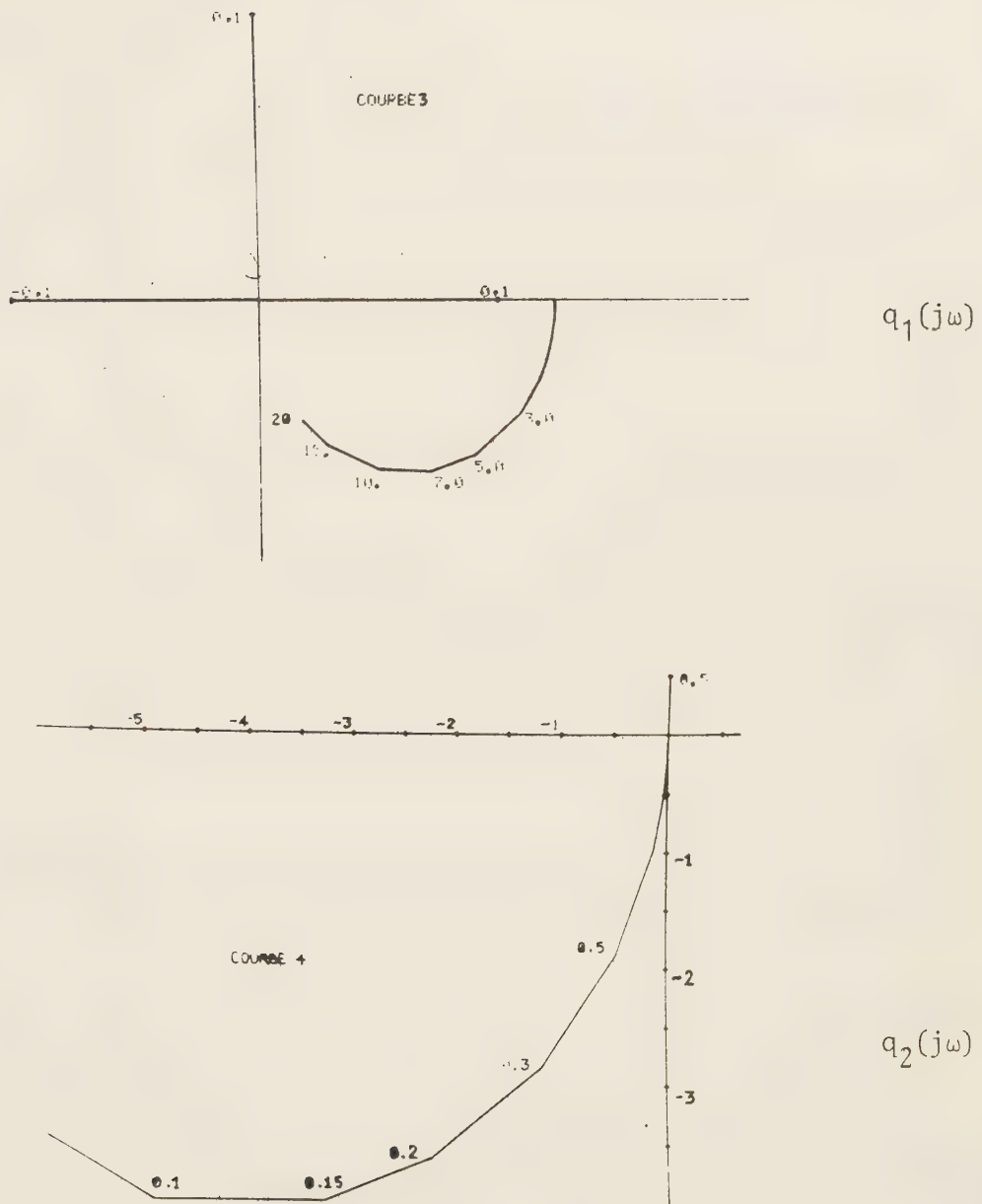


Fig. 2.8

Le système est donc stable en boucle fermée puisque le lieu $q_2(j\omega)$ entoure une fois le point $(-1,0)$ dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Si maintenant on veut tester l'indéfectibilité du système, il suffit de tracer les lieux caractéristiques des principales sous-matrices de $Q(s)$, c'est-à-dire de :

$$Q_1(s) = \left| \frac{s+5}{s^2+8s-1} \right| \quad Q_2(s) = \left| \frac{s+3}{s^2+8s-1} \right|$$

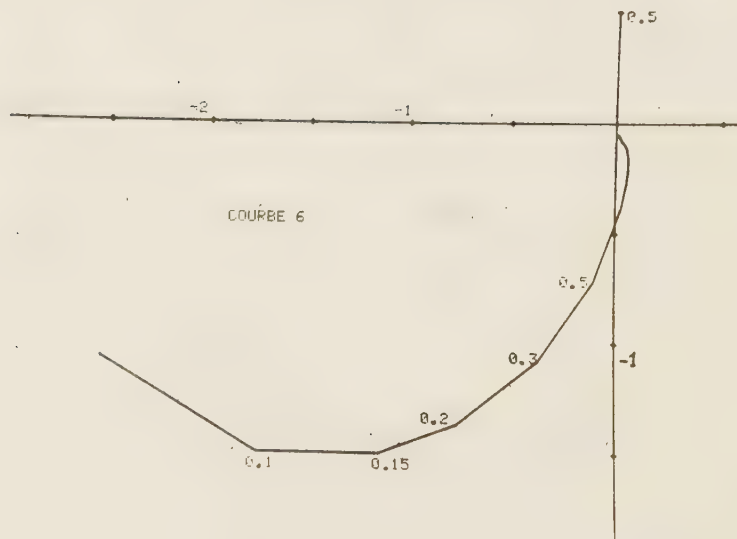
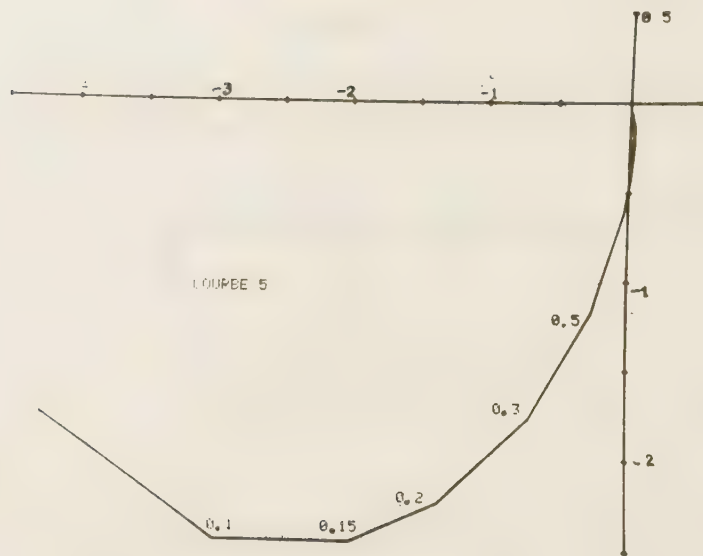


Figure 2.9

On constate que nous entourons deux fois le point $(-1,0)$ dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, le système n'est donc pas indéfectible.

Nous allons voir maintenant dans quelle mesure nous pouvons utiliser ces théorèmes sur la stabilité et l'indéfectibilité dans le cas de processus décrits par des équations d'état et commandés hiérarchiquement.

3 - APPLICATION AUX SYSTEMES MULTIVARIABLES REPRESENTES PAR DES EQUATIONS D'ETAT

3.1 - Mise en équation

Nous disposons au départ d'un modèle mis sous forme d'équations d'état :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A \underline{x} + B \underline{u} + \underline{w} \\ \underline{y} = C \underline{x} + \underline{v} \end{cases} \quad (2.16)$$

et auquel nous appliquons la commande :

$$\underline{u} = L \underline{x} - \underline{g} \quad (2.17)$$

Comme nous voulons étudier la stabilité du système, seules les dynamiques de celui-ci nous intéressent. Or, les termes constants $\underline{w}$ et $\underline{v}$ qui apparaissent dans le système (2.16) sont dus à ce que les états $\underline{x}$, les commandes $\underline{u}$ et les sorties $\underline{y}$ ne sont pas tous exprimés par rapport à leur point de fonctionnement nominal. Si nous effectuons un changement de variables convenable, pour qu'il en soit ainsi le système devient alors :

$$\begin{cases} \dot{\underline{X}} = A \underline{X} + B \underline{U} \\ \underline{Y} = C \underline{X} \end{cases} \quad (2.18)$$

Comme nous n'avons pas modifié les matrices A, B et C, la commande (2.17) devient :

$$\underline{U} = -L \underline{X} \quad (2.19)$$

et la nouvelle consigne $\underline{Z} = 0$.

Nous intéressant essentiellement au problème de la stabilité des régulations locales, si nous avons décomposé par exemple en deux sous-systèmes, l'équation (2.19) devient :

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_1 & 0 \\ 0 & -L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{X}_1 \\ \underline{X}_2 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Nous voulons maintenant transformer ces différentes équations sous forme de matrices de transmittances en s.

A partir du système (2.16), nous avons :

$$(sI - A) \underline{X}(s) = B \underline{U}(s)$$

d'où :

$$\underline{Y}(s) = C(sI - A)^{-1} B \underline{U}(s)$$

$$\underline{Y}(s) = G(s) \underline{U}(s) \quad (2.21)$$

avec :

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B \quad (2.22)$$

La principale difficulté consiste maintenant à pouvoir exprimer $\underline{U}(s)$ en fonction de $\underline{Y}(s)$, compte tenu de l'équation $\underline{Y} = \underline{C} \underline{X}$. Nous disposons pour cela de trois méthodes :

- (a) La méthode de la pseudo-inverse [2.6], [2.7], [2.8] qui permet d'écrire que $\underline{X} = \underline{C}^T (\underline{C} \underline{C}^T)^{-1} \underline{Y}$ dans le cas où le nombre d'états est supérieur au nombre de sorties, ce qui se produit généralement.
- (b) La méthode des observateurs de Luenberger [2.6], [2.9], [2.10] qui permet de calculer $\underline{X}$ en fonction de $\underline{Y}$ en résolvant l'équation différentielle :

$$\dot{\underline{X}} = \underline{A} \underline{X} + \underline{B} \underline{U} + \underline{Q} (\underline{Y} - \underline{C} \underline{X})$$

avec $\underline{Q}$ tel que $\underline{B} = \underline{A} - \underline{Q} \underline{C}$

- (c) Lorsque c'est possible, comme nous le verrons plus loin, on peut trouver directement $\underline{U}(s)$ en fonction de $\underline{Y}(s)$ à partir des équations du système ; cette méthode étant d'autant plus aisée à mettre en oeuvre que nous avons décomposé le système pour aboutir à l'équation (2.20).

Dans tous les cas, on aboutira donc à une équation :

$$\underline{U}(s) = \underline{M}(s) \underline{Y}(s) \quad (2.23)$$

Si on pose : $\underline{E}(s) = \underline{Z}(s) - \underline{Y}(s) = -\underline{Y}(s)$

Puisque la consigne est nulle après changement de variable, la commande devient :

$$\underline{U}(s) = -\underline{M}(s) \underline{E}(s)$$

Le système bouclé sera donc représenté schématiquement par la figure 2.10.

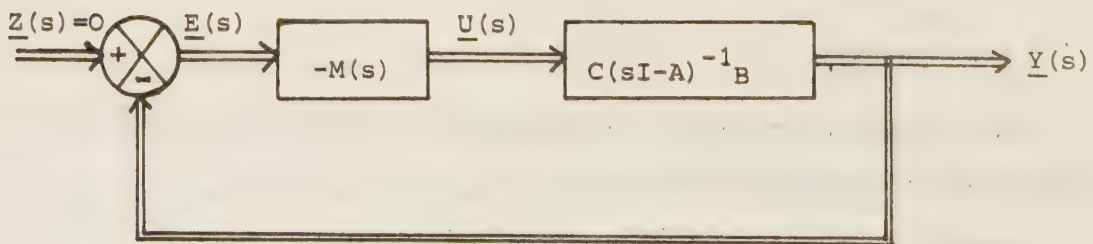


Figure 2.10

Pour l'étude de la stabilité d'un système multivariable bouclé représenté par des équations d'état, nous considérerons :

$-M(s)$ comme la matrice de fonctions de transfert des régulations

$C(sI - A)^{-1}B$ comme la matrice $G(s)$ du processus

et donc $Q(s) = -M(s) C (sI - A)^{-1}B$

3.2 - Exemple

Prenons un système à 2 entrées et 2 sorties décrit par les équations :

$$\dot{\underline{x}} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \end{vmatrix}$$

$$\underline{y} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$$

avec le critère à minimiser :

$$J = \frac{1}{2} \int_t^{t+T} (x_1^2 + x_2^2 + u_1^2 + u_2^2) d\tau$$

3.2.1 - Calcul de $G(s)$

$G(s)$ étant égal à $C(sI - A)^{-1}B$, on obtient facilement :

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 8s + 7} \begin{vmatrix} s+5 & 2 \\ 4 & s+3 \end{vmatrix}$$

Nous sommes en présence de la même matrice que celle citée en exemple au paragraphe 1.5. Le polynôme caractéristique n'a pas de pôle à partie réelle positive donc $p_0 = 0$.

D'autre part, les lieux caractéristiques déjà dessinés sur la figure 2.3 et ayant pour équation :

$$q_1(s) = \frac{1}{s+7} \quad \text{et} \quad q_2(s) = \frac{1}{s+1}$$

n'entourant pas le point $(-1,0)$, le système est stable si on lui applique un retour unitaire.

3.2.2 - Calcul de la matrice $K(s)$

Pour appliquer notre commande hiérarchisée lorsqu'on néglige les interactions, nous écrivons les sous-systèmes sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + u_1 \\ y_1 = x_1 \end{cases} \quad \text{avec le critère } J_1 = \frac{1}{2} \int_t^{t+T} (x_1^2 + u_1^2) d\tau$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = -5x_2 + u_2 \\ y_2 = x_2 \end{cases} \quad \text{avec le critère } J_2 = \frac{1}{2} \int_t^{t+T} (x_2^2 + u_2^2) d\tau$$

Nous aurons donc à calculer des commandes quadratiques à partir d'équations de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + u \\ y = x \end{cases} \quad \text{avec le critère } J = \frac{1}{2} \int_t^{t+T} (x^2 + u^2) d\tau$$

Si T est suffisamment grand (voir au chapitre 1 le paragraphe 2.2.2), nous devons chercher k tel que :

$$-ka - ak + k^2 - 1 = 0$$

d'où : $k = +a \pm \sqrt{a^2 + 1}$ avec $k > 0$

Dans notre exemple, nous obtenons :

$$k_1 = 0.1622$$

$$k_2 = 0.09902$$

On a donc : $u_1^* = -R_{11}^{-1} B_{11}^T k_1 x_1 = -k_1 x_1 = -k_1 y_1$

et $u_2^* = -k_2 y_2$

et la matrice des fonctions de transfert des régulations s'écrit donc :

$$K(s) = -M(s) = \begin{bmatrix} 0.1622 & 0 \\ 0 & 0.09902 \end{bmatrix}$$

on peut alors tracer les lieux caractéristiques de $Q(s) = G(s).K(s)$ (figure 2.11). Nous constatons que le système bouclé avec ses régulations locales reste donc stable.

De la même façon, le système est indéfectible, car si nous traçons les lieux caractéristiques des sous-matrices principales de $Q(s)$ (qui sont aussi les sous-matrices principales de $K(s) G(s)$ puisque $K(s)$ est diagonale), nous vérifions qu'ils n'entourent ni l'un ni l'autre le point critique (figure 2.12).

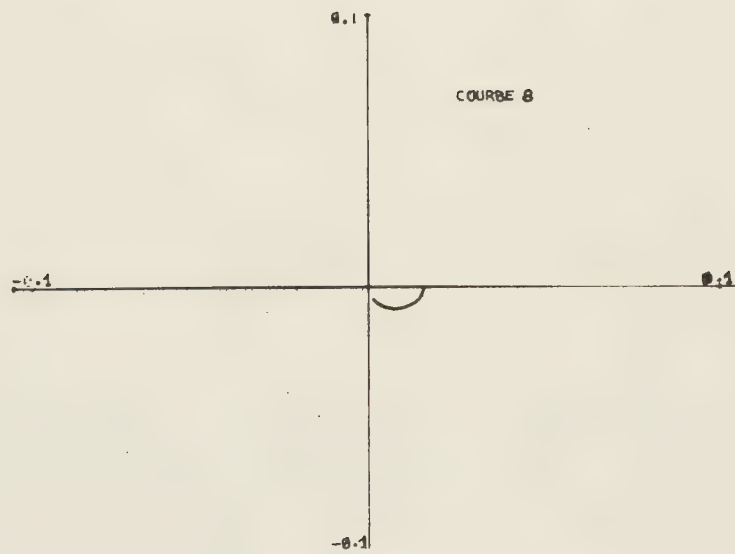
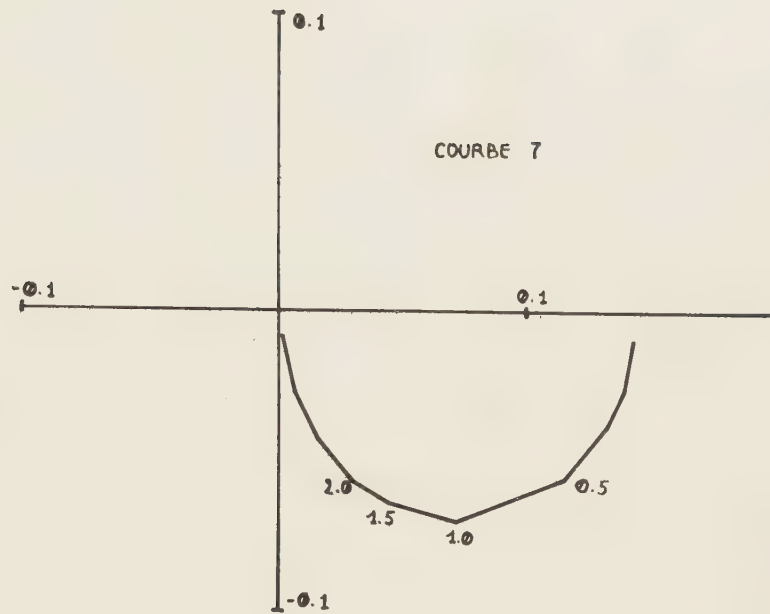


Figure 2.11

Lieux caractéristiques de $Q(s)$

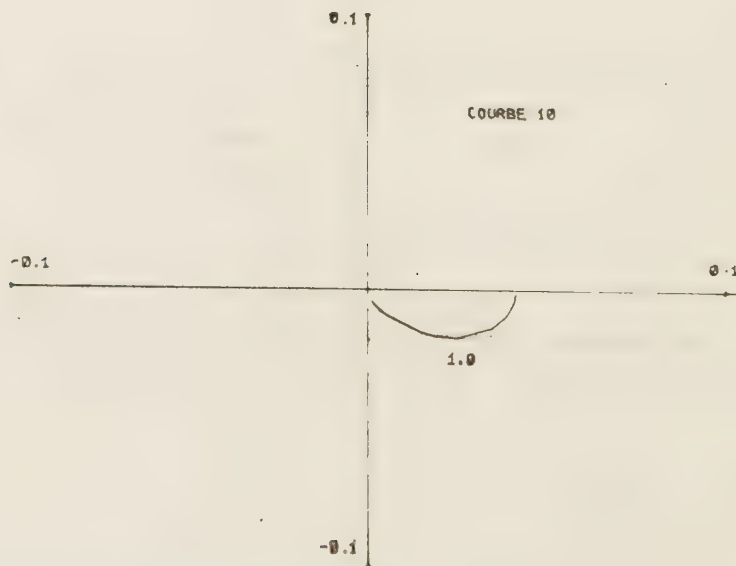
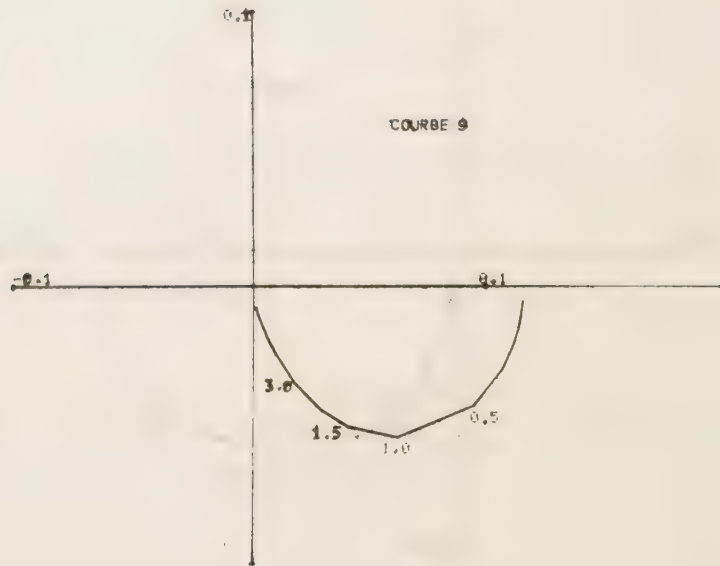


Figure 2.12

Lieux caractéristiques des sous-matrices principales de $Q(s)$

3.3 - Application à l'étude de la stabilité d'un système commandé hiérarchiquement

L'étude de la stabilité d'un système commandé hiérarchiquement tel que nous l'avons conçu au chapitre 1 apparaît comme indispensable afin de pouvoir satisfaire les contraintes que nous nous sommes fixées : régulations locales stables aussi bien en marche normale qu'en présence de pannes.

Il est alors indispensable de dégager l'influence des interactions que nous avons négligées dans le calcul des régulations locales afin de s'assurer que celles-ci resteront stables dans tous les cas. Ceci est très important comme l'illustre l'exemple suivant :

Prenons un système similaire à celui du paragraphe 3.2, mais pour lequel nous modifions un des coefficients d'interaction :

$$\dot{\underline{x}} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \end{vmatrix}$$

$$\underline{y} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$$

avec le critère à minimiser :

$$J = \frac{1}{2} \int_t^{t+T} (x_1^2 + x_2^2 + u_1^2 + u_2^2) d\tau$$

la matrice $G(s)$ est alors :

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 8s - 1} \begin{vmatrix} s+5 & 4 \\ 4 & s+3 \end{vmatrix}$$

Le polynôme caractéristique a un pôle à partie réelle positive, donc $p_0 = 1$. Comme nous n'avons pas modifié les termes diagonaux, la matrice $K(s)$ sera la même que dans le paragraphe 3.2 :

$$K(s) = \begin{vmatrix} 0.1622 & 0 \\ 0 & 0.09902 \end{vmatrix}$$

Les lieux caractéristiques de $Q(s) = G(s) K(s)$ tracés sur la figure (2.13) indiquent que nous entourons une fois le point $(-1,0)$ dans le sens contraire des aiguilles d'une montre (un rapide calcul donne $q_2(0) = -1,143$) donc le système est stable en régulation locale.

Par contre, en cas de panne sur une des chaînes, le système n'est pas indéfectible puisque les lieux caractéristiques des sous-matrices principales

de $G(s) K(s)$ (et donc de $K(s) G(s)$ puisque $K(s)$ est diagonale) n'entourent ni l'un ni l'autre le point $(-1,0)$ comme le montre la figure 2.14.

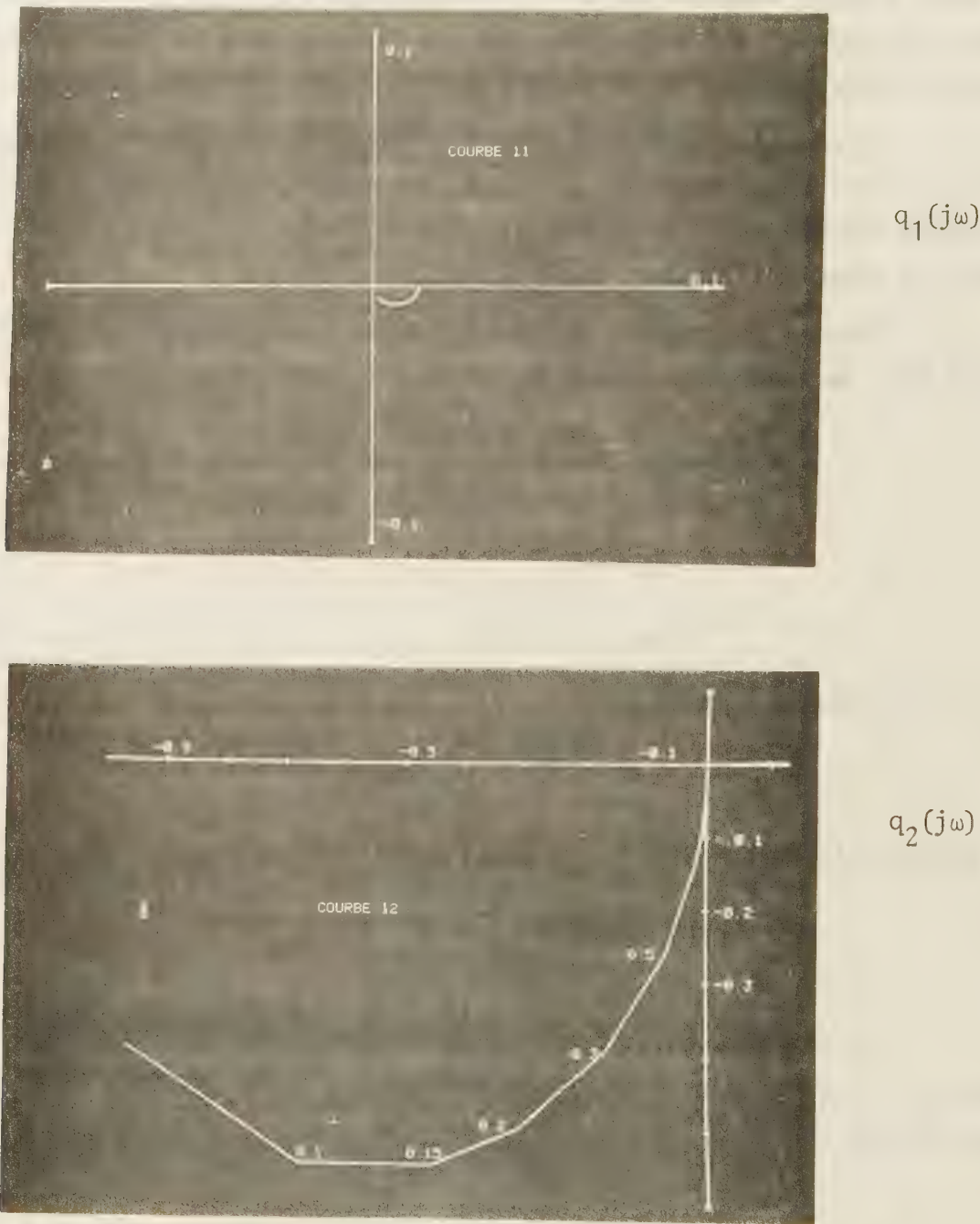


Figure 2.13

Lieux caractéristiques de $Q(s) = G(s) K(s)$

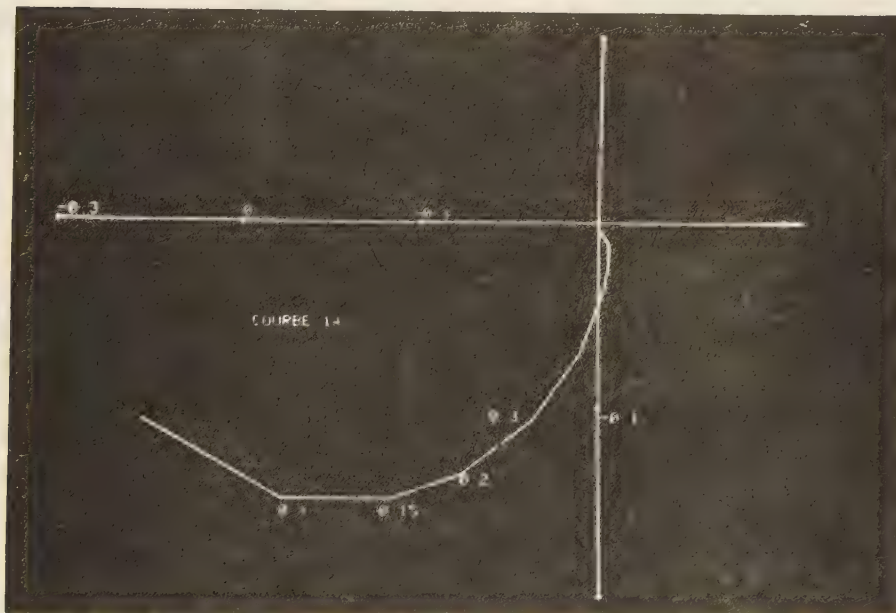
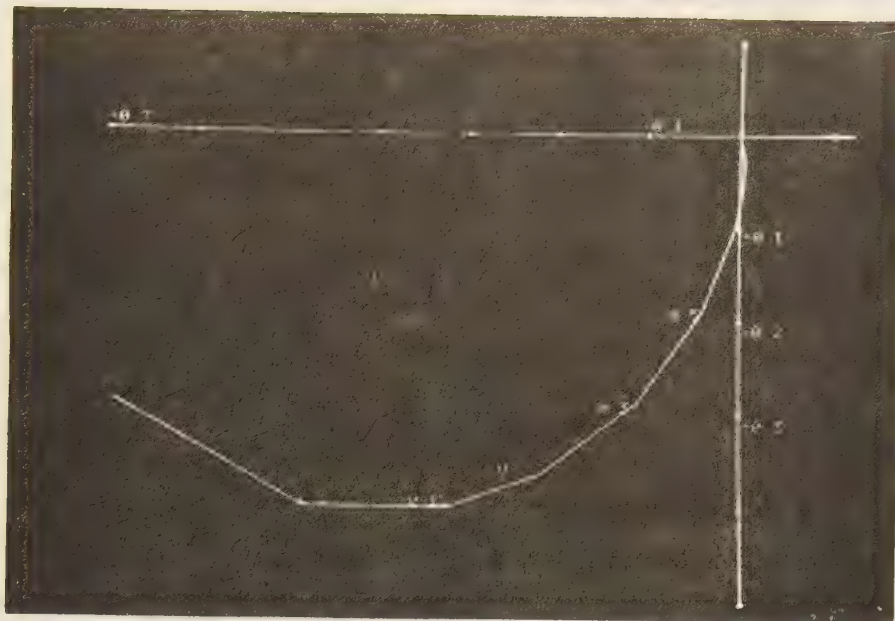


Figure 2.14

Lieux caractéristiques des sous-matrices principales de $Q(s) = G(s) \times K(s)$

Nous pouvons dire que la représentation des lieux caractéristiques est un moyen bien adapté à l'étude de la stabilité du système régulé localement. Pour cela, nous utiliserons la procédure suivante :

- Décomposer le système en sous-systèmes
- Calculer les régulations locales en négligeant les interactions entre sous-systèmes

- Mettre sous forme de transformée en s les équations du système et les régulations locales
- Tracer les lieux caractéristiques
- Appliquer les critères de stabilité définis par l'équation (2.13) et le théorème d'indéfectibilité.

Il faudra de plus veiller à ne pas avoir un lieu caractéristique qui passe trop près du point critique $(-1,0)$ car si le système a été mal identifié ou n'est pas stationnaire après identification, il est possible d'obtenir une régulation locale instable sur processus alors que la même commande simulée est stable.

Un problème se pose alors : si nous avons des régulations locales stables, nous n'aurons pas pour autant une bonne précision. En effet, les interactions négligées peuvent être considérées comme des perturbations inconnues qui risquent d'introduire des écarts permanents.

Nous allons voir dans le chapitre suivant comment nous avons envisagé de les combattre.

BIBLIOGRAPHIE

- [2-1] MAC FARLANE "Return difference and return-ratio matrices and their use in analysis and design of multivariable feedback systems"
Proceedings IEE, vol. 117, n°10, Oct. 1970.
- [2-2] MAC FARLANE "Use of characteristic transfert functions in the design of multivariable control systems"
IFAC, Dusseldorf, 1971.
- [2-3] BELLETRUTTI
MAC FARLANE "Characteristic loci techniques in multivariable - control - system design"
Proceeding IEE, vol. 119, n°9, Sept. 1971
- [2-4] MAC FARLANE "Frequency response methods in multivariable feedback system design"
Computer Aided Control System Design IEE, n°96, Avril 73.
- [2-5] BODE "Network analysis and feedback amplifier design"
Van Nostrand, 1945.
- [2-6] ABDALLAH Thèse de Docteur Ingénieur, E.N.S.M., Nantes, Décembre 1971.
- [2-7] De LARMINAT "Estimation"
Cours d'A.E.A. d'Automatique, E.N.S.M.
- [2-8] TAKAHASHI,
RABINS,
AUSLANDER "Control"
Addison Wesley - 1970
- [2-9] LUENBERGER "Observing of state of a linear system"
IEEE - Trans. on Military Electronics
Vol. MIL - 8, Avril 1964.
- [2-10] LUENBERGER "Observers for multivariable systems"
IEEE Trans. on Automatic Control
Vol. AC - 11, n°2, Avril 1966.

Chapitre 3

INTRODUCTION D'UNE COMMANDE DU TYPE "PROPORTIONNEL ET INTEGRAL"

Ce chapitre va nous permettre de définir une structure de commande particulière qui résout le problème de la précision statique. En effet, ainsi que nous l'avons vu précédemment, les interactions négligées dans le calcul des commandes locales peuvent être assimilées à des perturbations inconnues en général à valeur moyenne non nulle. Dans ces conditions, la commande que nous avons définie au Chapitre 1 de type "proportionnel" ne permet pas de corriger les erreurs stationnaires sur les sorties qui apparaissent alors. Une commande du type "Proportionnel et intégral" est donc proposée qui pourra d'ailleurs s'appliquer aussi bien au calcul des commandes locales qu'à la commande globale comme nous allons le voir.

1 - BUTS ET CALCUL D'UNE COMMANDE "PROPORTIONNELLE ET INTEGRALE"

1.1 - Limitations de la commande "proportionnelle"

Nous avons vu au Chapitre 1 que si on dispose d'un processus représenté par le système d'équations :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{u} + \underline{w} \\ \underline{y} = \underline{C}\underline{x} + \underline{v} \end{cases} \quad (3.1)$$

avec le critère à minimiser $J = \frac{1}{2} \int_t^{t+T} (\underline{e}^T \underline{Q} \underline{e} + \underline{u}^T \underline{R} \underline{u}) d\tau$ (3.2)

avec $\underline{e} = \underline{z} - \underline{y}$

Alors la commande est du type :

$$\underline{u} = -\underline{L}\underline{x} + \underline{N} (\underline{z} - \underline{y}) + \underline{M}\underline{w} \quad (3.3)$$

Nous avons ici un bouclage proportionnel sur l'état et nous pouvons représenter cette commande par la Figure 3.1.

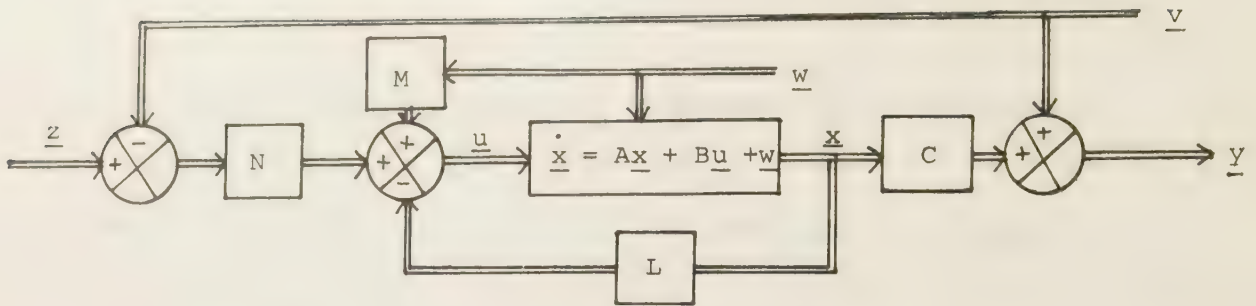


Figure 3.1

Cette commande que nous qualifions de "*proportionnelle*" est en fait du type proportionnel et dérivé puisqu'elle fait intervenir un bouclage sur les états ; ceux-ci constituant finalement une combinaison linéaire des sorties et des dérivées des sorties. Mais en aucun cas n'apparaît un terme intégral permettant de compenser les erreurs stationnaires sur les sorties. Celles-ci sont la plupart du temps dues :

- * A des perturbations inconnues à valeur moyenne non nulle, ce qui sera presque toujours le cas pour les commandes locales.
- ** A des erreurs de modèle lors de l'identification du processus :
soit une erreur sur un paramètre, soit une dérive lente non identifiée.
On montre assez facilement qu'il existe des erreurs stationnaires en présence de ce type de perturbations.

En effet, si nous considérons un système dont le modèle est :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{y} = C\underline{x} \end{cases}$$

On peut calculer une commande optimale quadratique de la forme $\underline{u} = -L\underline{x}$ qui permet d'obtenir un régime permanent $\underline{x} = 0$ puisque le système bouclé est stable.

En présence de perturbations inconnues à valeur moyenne non nulle, l'équation du processus est en fait :

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u} + \underline{w}$$

et nous lui appliquons toujours la commande $\underline{u} = -L\underline{x}$. Lorsque le processus arrive en régime permanent $\dot{\underline{x}} = 0$ et on a alors :

$$A\underline{x} - BL\underline{x} + \underline{w} = 0$$

D'où

$$\underline{x} = (A - BL)^{-1} \underline{w}$$

Nous obtenons donc une erreur statique par rapport au régime permanent $\underline{x} = 0$ désiré ; cette erreur ne dépendant que des perturbations.

On pourrait très bien avec une commande "proportionnelle" choisir le critère de façon à obtenir une erreur stationnaire faible. Il suffit d'augmenter le module des éléments de la matrice Q et diminuer ceux de R, mais on diminue alors le "degré de stabilité" du système.

Dans toute la suite, nous supposons que ces perturbations sont à valeur moyenne constante ou variant lentement.

1.2 - Calcul de la commande "proportionnelle et intégrale"

Cette méthode est due à MM. FOULARD et FOND [3-2], [3-3] et peut s'énoncer comme suit.

Nous allons insérer dans le système des intégrateurs dont nous définirons le rôle de la façon suivante :

$$\dot{\underline{f}} = \underline{z} - \underline{y} = \underline{e} \quad (3.4)$$

Soit encore

$$\dot{\underline{f}} = -C\underline{x} + \underline{z} - \underline{v}$$

$\underline{f}$ étant un vecteur de dimension m.

C'est-à-dire que nous intégrons l'écart entre la consigne et la sortie.

Dans ces conditions, le système d'équations (3-1) devient :

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}} \\ \dot{\underline{f}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{f} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \underline{u} + \begin{bmatrix} \underline{w} \\ \underline{z} - \underline{v} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{y}} \\ \dot{\underline{f}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{f} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{v} \\ 0 \end{bmatrix}$$

système que nous pouvons représenter schématiquement :

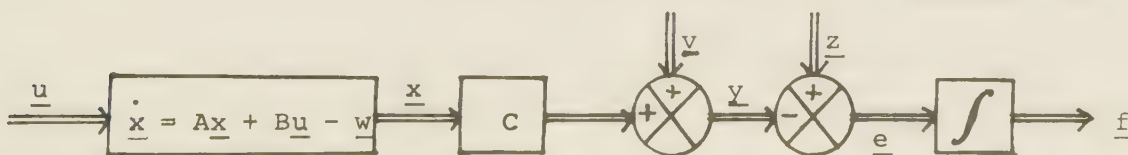


Figure 3.2

Transformons le critère quadratique à minimiser sous la forme :

$$J = \frac{1}{2} \int_t^{t+T} |\underline{e}^T Q \underline{e} + \underline{f}^T Q_1 \underline{f} + \underline{u}^T R \underline{u}| \, d\tau \quad (3.6)$$

où Q_1 est une matrice de dimension $m \times m$ symétrique définie positive.

Si on pose :

$$\begin{aligned} \underline{x}_1 &= \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{f} \end{bmatrix} & B_1 &= \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} & \underline{w}_1 &= \begin{bmatrix} \underline{w} \\ \underline{z} - \underline{v} \end{bmatrix} & A_1 &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} & \underline{y}_1 &= \begin{bmatrix} \underline{y} \\ \underline{f} \end{bmatrix} \\ C_1 &= \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} & \underline{v}_1 &= \begin{bmatrix} \underline{v} \\ 0 \end{bmatrix} & \underline{z}_1 &= \begin{bmatrix} \underline{z} \\ 0 \end{bmatrix} & Q^* &= \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q_1 \end{bmatrix} \\ & & & & \underline{e}_1 &= \underline{z}_1 - \underline{y}_1 = \begin{bmatrix} \underline{z} - \underline{y} \\ -\underline{f} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Le système (3.5) devient :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}_1 = A_1 \underline{x}_1 + B_1 \underline{u} + \underline{w}_1 \\ \underline{y}_1 = C_1 \underline{x}_1 + \underline{v}_1 \end{cases} \quad (3.7)$$

avec le critère :

$$J = \frac{1}{2} \int_t^{t+T} |\underline{e}_1^T Q^* \underline{e}_1 + \underline{u}^T R \underline{u}| \, d\tau \quad (3.8)$$

les équations (3.7) et (3.8) nous montrent que nous pouvons calculer une commande optimale quadratique de la même façon qu'au Chapitre 1.

Elle est de la forme :

$$\underline{u} = -R^{-1} B_1^T [K_1 \underline{x}_1 + \underline{g}_1] \quad (3.9)$$

avec K_1 régime permanent de l'équation de Riccati :

$$\dot{K}_1 = -K_1 A_1 - A_1^T K_1 + K_1 B_1 R^{-1} B_1^T K_1 - C_1^T Q^* C_1 \quad (3.10)$$

et $\underline{g}_1$ régime permanent de l'équation différentielle :

$$\dot{\underline{g}}_1 = (A_1^T - K_1 B_1 R^{-1} B_1^T) \underline{g}_1 - C_1^T Q^* (\underline{z}_1 - \underline{v}_1) + K_1 \underline{w}_1 \quad (3.11)$$

$\underline{g}_1$ sera donc de la forme :

$$\underline{g}_1 = G_1 (\underline{z}_1 - \underline{v}_1) + H_1 \underline{w}_1 \quad (3.12)$$

en utilisant les équations (2.9), (2.12) et les changements de variable définis plus haut, on peut représenter la commande par l'équation :

$$\underline{u} = -L_1 \underline{x} - P \underline{f} + N_1 (\underline{z} - \underline{v}) + M_1 \underline{w} \quad (3.13)$$

La Figure 3.3 schématise cette commande appliquée au système :

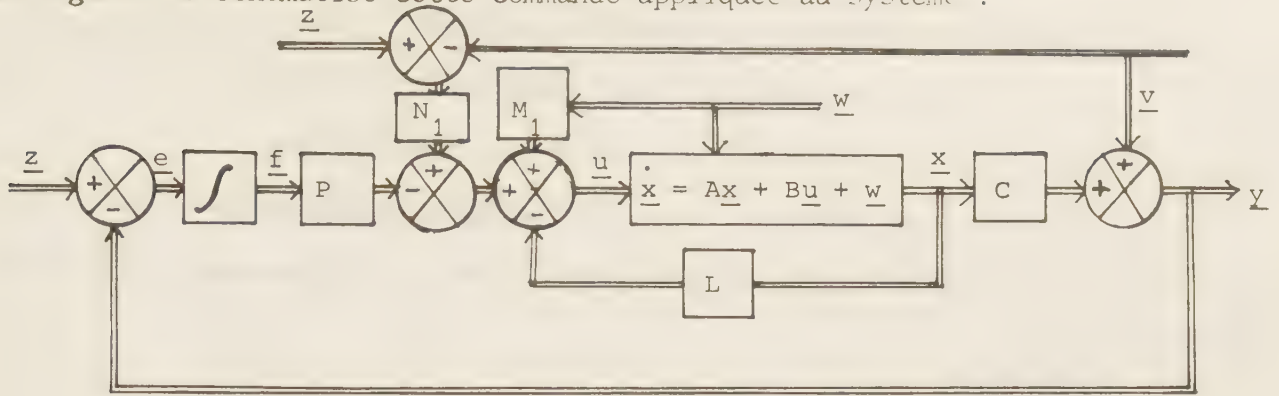


Figure 3.3

Le système global obtenu est stable car tous ses éléments sont calculés à l'aide de l'optimisation quadratique. Grâce à la présence des intégrateurs, il ne peut être en régime stationnaire que si l'erreur e est nulle. Si des perturbations constantes apparaissent, leur effet sera entièrement rattrapé par les boucles intégrales et l'erreur sera très faible si ces perturbations sont à variation lente.

Si nous voulons comparer avec les régulations classiques, la matrice L_1 correspond à un correcteur en réaction alors que l'ensemble des intégrateurs et de la matrice P forme un correcteur du type cascade.

2 - OBSERVABILITE ET COMMANDABILITE DU SYSTEME ELARGI -

Pour pouvoir appliquer la théorie de la commande optimale au système (3.5) obtenu à partir du système (3.1) en plaçant des intégrateurs sur les sorties, il est nécessaire qu'il soit complètement observable et commandable.

2.1 - Observabilité

Si nous supposons que le système (3.1) est observable et commandable alors le système élargi (3.5) est complètement observable. En effet le vecteur f est connu puisqu'il est directement accessible ; seul le vecteur x est donc à observer à partir des vecteurs u et y : l'observabilité du système élargi se ramène donc à l'observabilité du système de base.

Il est toutefois important de noter que pour que le système (3.5) soit observable, il est nécessaire que le vecteur f figure en sortie ce qui explique la forme de l'équation de sortie.

Examinons maintenant la commandabilité.

2.2 - Condition nécessaire de commandabilité

Si le système de base (3.1) est commandable, la matrice

$$Q_2 = |B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B| \text{ de dimensions } |n \times (r \times n)| \text{ est de rang } n.$$

Pour que le système (3.5) soit commandable, la matrice

$$Q_3 = |B_1 \ A_1 \times B_1 \ \dots \ A_1^{n+m-1} \times B_1| \text{ de dimensions } |(n+m) \times (r \cdot (n+m))| \text{ doit être de rang } (n+m).$$

Remarquons que :

$$A_1^{n+1} = A_1 \cdot \begin{vmatrix} A^n & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton A^n peut s'exprimer en fonction linéaire des A^j ($0 \leq j \leq n-1$)

$$A^n = \sum_{j=0}^{n-1} \mu_j A^j$$

$$\text{Dans ces conditions } A_1^{n+1} = A_1 \begin{vmatrix} A^n & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Cette équation devient par application du théorème de Cayley-Hamilton

$$\sum_{j=0}^{n-1} \mu_j A_1 \begin{vmatrix} A^j & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \sum_{j=0}^{n-1} \mu_j A_1^{j+1}$$

$$\text{donc finalement : } A_1^{n+1} = \sum_{j=0}^{n-1} \mu_j A_1^{j+1}$$

Comme A_1^{n+1} et les puissances successives de A_1 s'expriment linéairement en fonction de A_1^j ($1 \leq j \leq n$), la matrice Q_3 a le même rang que la matrice :

$$Q_4 = |B_1 \ A_1 B_1 \ \dots \ A_1^n B_1|$$

de dimensions $|(n+m) \times (r \cdot (n+1))|$

Si on exprime Q_4 en fonction de A , B et C on obtient :

$$Q_4 = \begin{vmatrix} B & AB & \dots & A^n B \\ 0 & -CB & \dots & -C A^{n-1} B \end{vmatrix}$$

Q_4 a m lignes et r colonnes de plus que Q_2 . Comme Q_2 est de rang n on en déduit :

- * Si $m > r$ le rang maximum de Q_4 est $n + r < n + m$
- * Si $m \leq r$ le rang maximum de Q_4 est $n + m$

Comme Q_4 a le même rang que la matrice de commandabilité Q_3 du système (3.5), on en déduit :

$$\text{rang } Q_3 = \inf |n + m, n + r|$$

d'où la condition nécessaire :

<< Une condition nécessaire pour que le système élargi, obtenu à partir du système de base en plaçant des intégrateurs sur les sorties, à raison d'un seul intégrateur par sortie, soit commandable, est que le nombre d'intégrateurs soit inférieur ou égal au nombre d'entrées.>>

2.3 - Condition nécessaire et suffisante de commandabilité

La complète commandabilité du système (3.5) dépend du rang de Q_4 et particulièrement des dimensions et de la nature de la matrice C . Pour faciliter l'étude, nous mettrons d'abord le système sous forme canonique et nous étudierons en premier lieu un système mono-entrée.

2.3.1. - Système mono-entrée

Si nous considérons le système régi par l'équation différentielle :

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + \underline{b}u$$

où $\underline{b}$ est un vecteur de dimension $n \times 1$ et u une commande scalaire et si nous supposons que ce système est complètement commandable, alors Kalman a montré [3-1], [3-5] qu'on pouvait le mettre sous la forme canonique associée, de sorte que sa matrice d'état ait la forme :

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \end{bmatrix} \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

les a_i étant les coefficients du polynôme caractéristique de A :

$$s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_2 s + a_1 = 0$$

Pour cela, il convient d'effectuer le changement de base

$$\underline{x} = K\underline{y}$$

avec $K = [\underline{k}_1, \underline{k}_2, \dots, \underline{k}_n]$

tel que $\underline{k}_n = \underline{b}$
 $\underline{k}_i = + a_{i+1} \underline{b} + A \underline{k}_{i+1}$ pour $i = 1, 2, \dots, n - 1$
 avec $a_i = - \langle \gamma_i^{-1}, A^n \underline{b} \rangle$

où γ_i^{-1} représente la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice inverse de commandabilité.

Dans ces conditions, le système de base (3.1) ayant une seule entrée et étant complètement commandable, peut-être mis sous la forme canonique associée indiquée ci-dessus.

On demontre alors |3-2| , |3-3| |Annexe 3| qu'on peut énoncer la condition nécessaire et suffisante :

<< Une condition nécessaire et suffisante pour que le système mono-entrée élargi obtenu à partir du système de base mono-entrée en plaçant un intégrateur en sortie, soit commandable et que l'entrée de cet intégrateur soit linéairement dépendante de la composante d'état x_1 du système de base représenté sous la forme canonique associée.>>

Le système élargi est alors celui de la figure 3.4

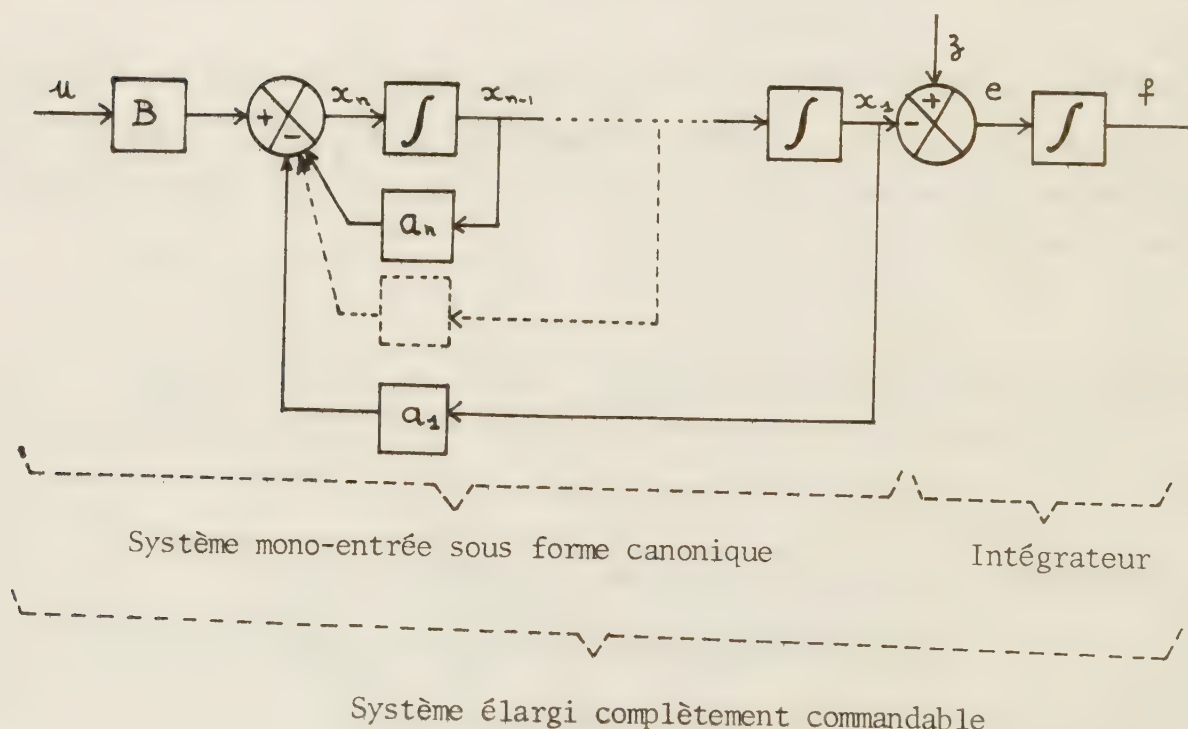


Figure 3.4

2.3.2 - Système multidimensionnel

Si nous considérons maintenant le système multivariable

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u}$$

où cette fois la matrice B est rectangulaire de dimension $n \times r$ et constituée par les vecteurs :

$$B = [\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_r]$$

Wonham et Johnson montrent alors [3-4], [3-5] que si ce système est complètement commandable on peut lui appliquer le changement de base dont la matrice K est :

$$K = [\underline{k}_1^1 \dots \underline{k}_{n_1}^1, \underline{k}_1^2 \dots \underline{k}_{n_2}^2, \dots, \underline{k}_1^r \dots \underline{k}_{n_r}^r]$$

avec n_i dimension du sous-espace E_i engendré par $\underline{b}_i$ et tel que $\sum_{i=1}^r n_i = n$

on aura $\underline{k}_{n_i}^j = \underline{b}_i$ $i = 1, \dots, r$

et $\underline{k}_j^i = + a_{j+1}^i \underline{b}_i + A \underline{k}_{j+1}^i$ $j = n_{i-1}, n_{i-2}, \dots, 1$

les a_j^i étant les coefficients du polynôme minimal du sous-espace E_i .

Les matrices transformées $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont alors :

$$\bar{A} = \begin{vmatrix} A_1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1r} \\ & A_2 & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2r} \\ & & \ddots & & \vdots \\ (0) & & & & A_r \end{vmatrix}$$

$$\text{avec } A_i = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 \\ -a_1^i & -a_2^i & \dots & -a_{n_i}^i \end{vmatrix}$$

$$\text{et } \alpha_{ij} = \begin{vmatrix} X \\ X \\ \vdots \\ \vdots \\ X \end{vmatrix} (0) \quad (X \text{ terme non nul})$$

$$\bar{B} = K^{-1} B = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ & 0 \\ & 0 \\ & \vdots \\ & 1 \\ & \dots \\ & 0 \\ & \vdots \\ & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \updownarrow \\ n_r \end{matrix}$$

On peut donc décomposer le système en m sous-systèmes S_i mono-entrée ($1 \leq i \leq r$) et l'écrire sous la forme canonique précédente. De plus, il y a des couplages entre les états de ces sous-systèmes et leurs entrées dûs aux matrices α_{ij} .

Si nous prenons un système multivariable (3.1) sous cette forme canonique, chaque sous-système mono-entrée S_i est complètement commandable dans son sous-espace d'état. Il est alors possible de placer r intégrateurs (un intégrateur I_i sur une sortie du sous-système S_i) sans modifier la commandabilité du système tout entier.

Comme il y a r sous-systèmes, on peut donc placer au plus r intégrateurs sur les sorties. D'où la condition nécessaire et suffisante.

<< Une condition nécessaire et suffisante pour que le système multivariable, obtenu en plaçant des intégrateurs I_i sur les sorties, à raison d'un seul intégrateur par sortie, soit commandable, est que le nombre d'intégrateurs soit inférieur ou égal au nombre d'entrées, et que l'entrée de l'intégrateur I_i soit linéairement dépendante de la composante d'état $(x_1)_i$ du sous-système S_i >>

Le système élargi aura donc pour équations :

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}} \\ \underline{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{f} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \underline{u} + \begin{bmatrix} \underline{w} \\ \underline{z} - \underline{v} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{y} \\ \underline{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{f} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{v} \\ 0 \end{bmatrix}$$

où T est une matrice constituée par un maximum de r lignes de C . Ces lignes correspondant aux sorties qui sont linéairement dépendantes de la composante d'état $(x_1)_i$ du sous-système S_i après décomposition sous forme canonique.

3 - APPLICATION A LA COMMANDE HIERARCHISEE

Nous avons vu que l'introduction d'intégrateurs sur les sorties en respectant les conditions du théorème cité au § 2.2.2 ne change pas fondamentalement la structure ni du système ni de sa commande. Dans ces conditions, les résultats du chapitre 1 sur la commande hiérarchisée dans le cas d'un critère quadratique à horizon fuyant sont applicables.

Nous décomposons donc notre système ainsi qu'il a été indiqué au Chapitre 1 mais en ajoutant autant que possible (dans les limites du théorème) des intégrateurs sur les sorties afin de combattre les dérives et bruits à valeur moyenne non nulle, dues dans le cas de la régulation locale en grande partie au fait que l'on néglige les interactions pour le calcul des régulateurs.

Mais négliger les interactions et rajouter des intégrateurs sur les sorties risque d'avoir un effet de déstabilisation sur ces régulations qu'il n'est pas possible d'évaluer a priori dans le cas général.

Cependant les résultats mis en évidence au Chapitre 2 vont nous permettre d'étudier sur quelles sorties on peut placer des intégrateurs sans pour cela modifier la stabilité du système bouclé. Nous aurons alors pu réaliser le compromis entre les deux critères parfois incompatibles de stabilité et de précision.

Ceci nous amène à faire une remarque très importante et que nous allons développer dans l'application pratique qui suit.

Si nous ne pouvons mettre autant d'intégrateurs sur les sorties en local qu'en global, il n'y a aucune raison pour adopter une structure de commande identique pour les deux régulations. Ce que nous pourrions encore exprimer sous la forme suivante :

Le calcul des régulations locales et globales pour des raisons de stabilité et de précision peut très bien s'effectuer à partir de modèles et de critères différents contrairement à ce qui a été dit au Chapitre 1.

C'est ce que nous allons voir dans l'application au générateur de vapeur du laboratoire d'Automatique de l'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique de Nantes.

BIBLIOGRAPHIE

- |3-1| KALMAN R.E. "Contributions to the theory of optimal control"
Bol. Soc. Mat. Mex., 1960, pp 102-119.
- |3-2| FOND M. "Contributions à la synthèse de la commande
dynamique de systèmes multidimensionnels"
Thèse de Docteur-Ingénieur, Grenoble,
Juillet 1971.
- |3-3| FOND M., FOULARD C. "Linear multivariable control in the presence
of unknown non zero mean value perturbations"
IFAC, Düsseldorf, October 1971.
- |3-4| WONHAM W.M. "On pole assignment in multi-input controllable
linear systems"
I.E.E.E., AC-12, n° 6, Décembre 1967.
- |3-5| MAHU C. "Formes canoniques pour les systèmes multivaria-
bles"
Article de "Contribution à la théorie des
systèmes".
I.R.I.A., Cahier n° 3, Novembre 1970.

Chapitre 4

APPLICATION A LA COMMANDE EN TEMPERATURE ET EN PRESSION D'UN GENERATEUR DE VAPEUR

1 - DESCRIPTION DU PROCESSUS ET DU MATERIEL DE COMMANDE

1.1 - Processus

Il s'agit d'une chaudière marine pouvant fournir 1500 kg/h de vapeur à 20 bars, surchauffée à 300°C, dans un groupe turbo-dynamo de 85 kW.

Cette chaudière de type symétrique, à circulation naturelle, comporte un ensemble évaporateur à tubes et ballon, puis un surchauffeur, un désurchauffeur permettant l'injection de l'eau et un resurchauffeur.

Après détente, la vapeur est condensée puis recyclée par une pompe de charge.

Nous nous intéresserons essentiellement à la chaîne de surchauffe, les autres régulations (niveau d'eau dans le ballon, ventelle d'air ...) étant réalisées par des procédés classiques ne sont pas prises en compte dans les équations du système.

Le problème de régulation de cette unité pilote portera donc sur un système :

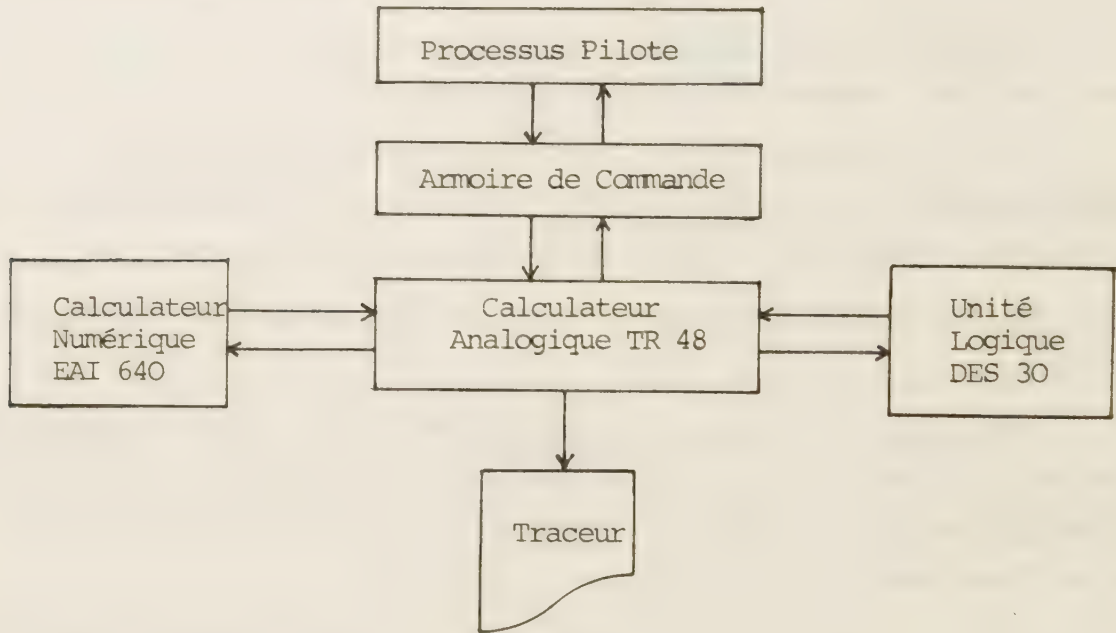
- * à deux commandes :
 - le débit de combustible q_c
 - le débit de désurchauffe q_d
- * à deux grandeurs réglées :
 - la pression de vapeur surchauffée p_s
 - la température de vapeur surchauffée t_s

D'autre part, le système devra faire face à des perturbations. En effet, nous avons voulu que cette chaudière ait un travail proche d'une chaudière thermique en lui imposant de fournir, à une pression et à une température constantes, la vapeur du groupe générateur, malgré des variations de charge du réseau électrique utilisateur.

Le débit de vapeur à l'admission de la turbine sera donc considéré comme une perturbation, car on admettra qu'une variation en échelon de la puissance demandée se traduise immédiatement par une variation en échelon de ce débit de vapeur, la régulation en vitesse de la turbine étant très rapide devant les constantes de temps de la chaudière.

La régulation devra donc, devant une variation du débit de vapeur (10 à 20 % autour de 1000 kg/h) due à une variation de la charge, agir sur le débit de combustible et le débit d'eau de désurchauffe afin d'obtenir des écarts transitoires inférieurs à ± 1 bar sur la pression et inférieurs à $\pm 5^{\circ}\text{C}$ sur la température.

1.2 - Matériel de commande



* Armoire de commande

Elle comprend les organes électromécaniques permettant la commande du processus pilote et les capteurs effectuant les mesures des différentes grandeurs physiques. Ces organes sont connectés à une armoire électronique qui sert d'interface entre le processus et le calculateur analogique.

* Unité analogique et logique

Nous avons utilisé un calculateur analogique EAI TR 48 couplé à une unité logique EAI DES 30.

* Unité numérique

Il s'agit d'un EAI 640 de 16 K mots de 16 bits et de cycle de base de 1,6 μs . Ce calculateur est relié au calculateur analogique par 16 convertisseurs analogique - digital et 10 convertisseurs digital - analogique.

La liaison entre l'unité numérique et l'unité logique est assurée par 6 canaux d'interruption.

* Traceur.

C'est un BRUSH MARK 260 à six voies parallèles.

Le câblage analogique et logique est reporté en Annexe 4.

2 - MODELE ET CRITERE

Le calcul d'une commande quadratique nécessite la connaissance d'un modèle du processus et le choix d'un critère.

La détermination de ce modèle se fait en deux étapes :

- Choix de formes d'équations basées sur des connaissances physiques et expérimentales du processus
- Identification des différents paramètres afin d'obtenir un modèle dont le comportement soit aussi proche que possible du processus réel.

La méthode utilisée a été l'identification par filtrage non linéaire [4-1], [4-2] qui a donné les résultats suivants :

2.1 - Modèle

Nous appellerons :

p_b : écart de pression au ballon autour de 20 bars

p_s : écart de pression de sortie autour de 20 bars

t_s : écart de température de sortie autour de 300°C

x_3 : variable intermédiaire

q_s : débit de vapeur en kg/h (0 à 2000)

δq_s : écart de débit de vapeur autour de 1000 kg/h

q_c : débit de combustible en kg/h (0 à 200)

q_d : débit d'eau de désurchauffe en kg/h (0 à 200)

2.1.1 - Equation de pression au ballon

p_b se comporte comme un intégrateur vis-à-vis des grandeurs d'entrée, ce qui conduit à choisir une équation de la forme :

$$\dot{p}_b = a q_c - b(q_s - q_d) + c \quad (4.1)$$

2.1.2 - Equation de pression de sortie

Il existe entre la pression de la vapeur au ballon et la pression de la vapeur à la sortie du désurchauffeur une perte de charge qui

dépend bien sûr de la vitesse d'écoulement du fluide, c'est-à-dire de q_s ; on aura donc une loi polynômiale de la forme :

$$p_s = p_b - |d + e(q_s - q_{sN}) + f(q_s - q_{sN})^2| \quad (4.2)$$

q_{sN} désignant le débit de vapeur nominal, ici 1000 kg/h.

2.1.3 - Equation de température de sortie

Un système linéaire du deuxième ordre a été choisi :

$$\ddot{t}_s + a_1 \dot{t}_s + a_2 t_s = b_{11} q_c + b_{12} \dot{q}_c + b_{21} q_d + b_{22} \dot{q}_d + b_{31} q_s + b_{32} \dot{q}_s$$

Si on pose :

$$\dot{x}_3 = \ddot{t}_s + a_1 \dot{t}_s - b_{12} \dot{q}_c - b_{22} \dot{q}_d - b_{32} \dot{q}_s$$

Alors :

$$x_3 = \dot{t}_s + a_1 t_s - b_{12} q_c - b_{22} q_d - b_{32} q_s$$

Et la représentation d'état de la température sera :

$$\begin{cases} \dot{t}_s = -a_1 t_s + x_3 + b_{12} q_c + b_{22} q_d + b_{32} q_s \\ \dot{x}_3 = -a_2 t_s + b_{11} q_c + b_{21} q_d + b_{31} q_s \end{cases}$$

En fait, on cherchera un modèle linéaire autour d'un point de fonctionnement q_{cN} , q_{dN} , q_{sN} , t_{sN} . Dans ces conditions, le système d'équations à identifier sera :

$$(4.3) \quad \begin{cases} \dot{t}_s = -a_1 t_s + x_3 + b_{12}(q_c - q_{cN}) + b_{22}(q_d - q_{dN}) + b_{32}(q_s - q_{sN}) \\ \dot{x}_3 = -a_2 t_s + b_{11}(q_c - q_{cN}) + b_{21}(q_d - q_{dN}) + b_{31}(q_s - q_{sN}) \end{cases}$$

2.1.4 - Intégrateurs sur les sorties

Ainsi que nous l'avons vu au chapitre 3, nous allons placer un intégrateur sur les deux sorties du système de telle sorte que :

$$\begin{aligned} \dot{f}_1 &= z_1 - p_s \\ \dot{f}_2 &= z_2 - t_s \end{aligned}$$

Comme nous voulons que les écarts en température et en pression restent nuls, les consignes seront :

$$z_1 = z_2 = 0 \quad (4.4)$$

et on a donc :

$$\begin{aligned}\dot{f}_1 &= -p_s \\ \dot{f}_2 &= -t_s\end{aligned}\quad (4.5)$$

2.1.5 - Résultats de l'identification

L'identification nous fournit les résultats suivants :

Pour $q_{sN} = 1000 \text{ kg/h}$ $q_{cN} = 80 \text{ kg/h}$ $q_{dN} = 63,25 \text{ kg/h}$
 $t_{sN} = 300^\circ\text{C}$, on a :

$$\begin{aligned}a &= 0.0003306 & d &= 1.252 \\ b &= 0.00003026 & e &= 0.00188 \\ c &= 0.003777 & f &= 0. \\ a_1 &= 0.02737 & b_{32} &= -0.001463 \\ a_2 &= 0.0001324 & b_{11} &= 0.0001715 \\ b_{12} &= 0.004884 & b_{21} &= -0.00008945 \\ b_{22} &= -0.00206 & b_{31} &= -0.000006514\end{aligned}$$

On constate qu'on a linéarisé l'équation donnant p_s en fonction de p_b et q_s , ce qui explique $f = 0$.

On peut apprécier la qualité de l'identification à l'aide de la figure 4.1 : on a fait figurer les trois grandeurs réelles : pression ballon, pression de sortie et température de sortie et en-dessous de chacune d'elle la variable estimée puis simulée (voir page 59).

Dans la première partie de la figure 4.1, on voit la phase d'identification qui a permis de déterminer les valeurs des paramètres.

A l'instant (a) apparaissent les courbes simulées à partir du modèle obtenu. On peut comparer ces courbes simulées aux courbes réelles tracées juste au-dessus et remarquer qu'on obtient des résultats très satisfaisants.

2.2 - Critère

Le critère quadratique fait intervenir les écarts en pression et en température, les sorties des intégrateurs placés sur les deux sorties et les vitesses de variation des commandes, de façon à ménager les organes du processus. On aura donc un critère de la forme :

$$J = \frac{1}{2} \int_t^{t+T} (t_s^2 + \alpha^2 p_s^2 + \beta^2 f_1^2 + \gamma^2 f_2^2 + \delta^2 \dot{q}_c^2 + \epsilon^2 \dot{q}_d^2) d\tau \quad (4.6)$$

Nous considérons donc comme commandes les dérivées des débits de combustible et d'eau de désurchauffe :

$$\begin{aligned} u_1 &= \dot{q}_c \\ u_2 &= \dot{q}_d \end{aligned} \quad (4.7)$$

Nous avons ici un critère à horizon fuyant dans lequel nous avons choisi :

$$T = 600 \text{ s}$$

Ceci correspond à un temps plus grand que les temps de réponse du système, ce qui est équivalent à un critère dont les bornes seraient $|0, +\infty|$ mais avec un calcul plus facile.

Diverses considérations développées dans les thèses de messieurs THOMAS et ABDALLAH [4-3], [4-4] ont conduit à adopter les valeurs suivantes pour les coefficients de pondération du critère :

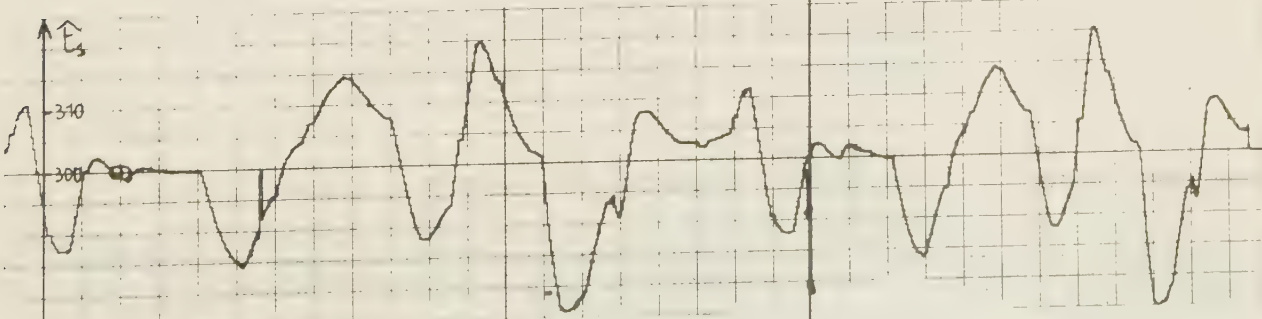
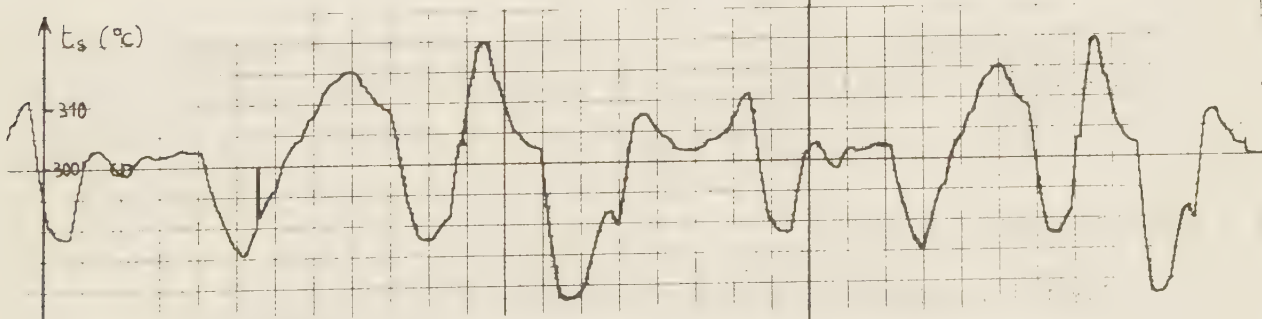
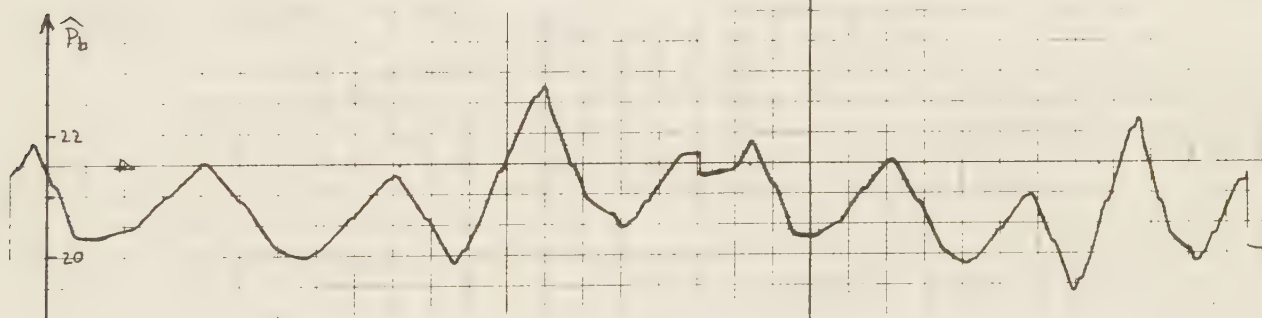
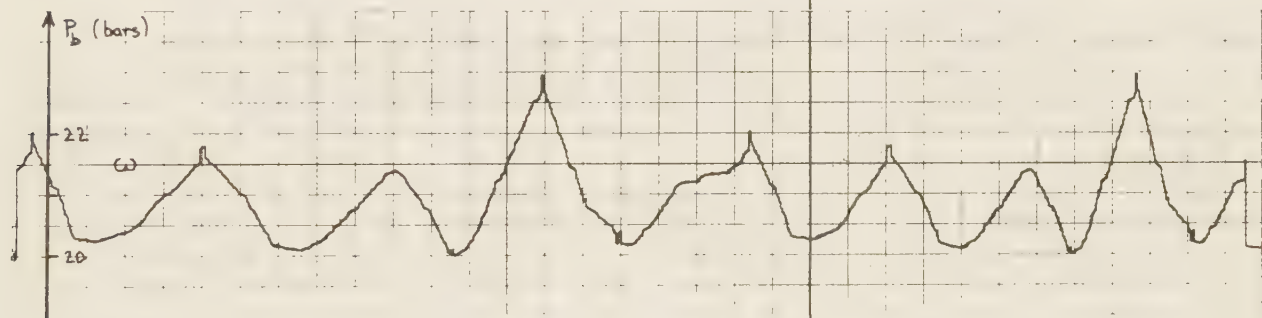
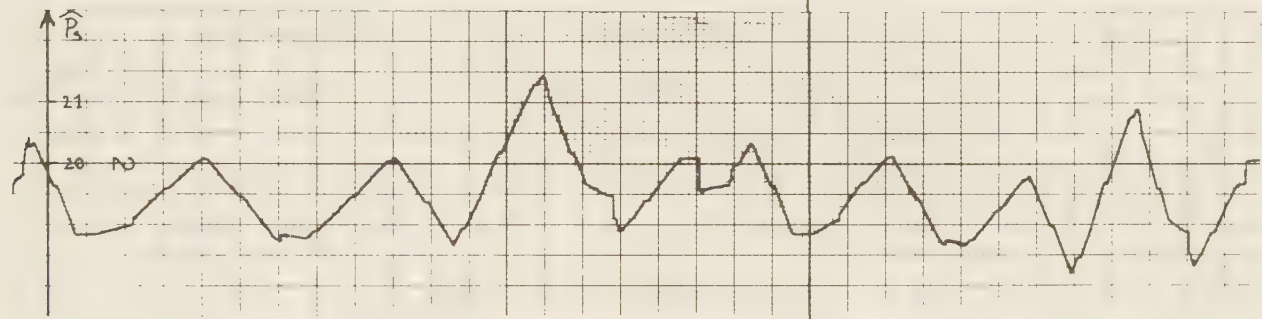
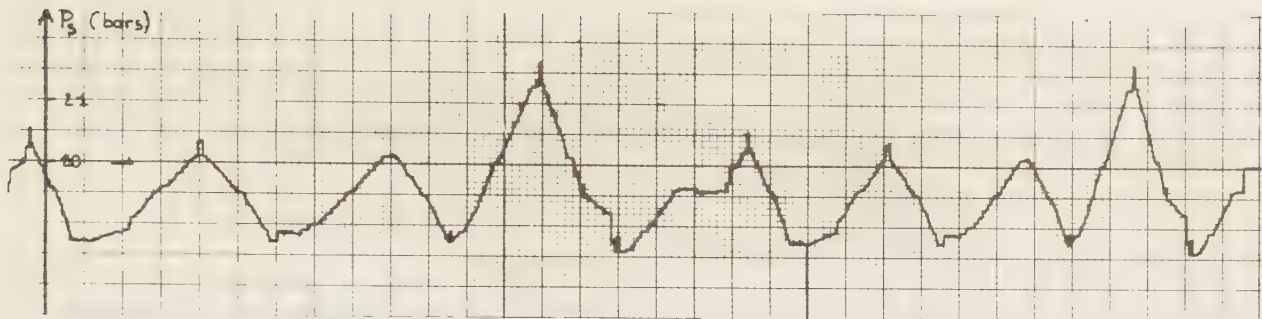
$$\begin{aligned} \alpha^2 &= 16 \\ \beta^2 &= 0.16 \\ \gamma^2 &= 0.01 \\ \delta^2 = \varepsilon^2 &= 30 \end{aligned}$$

2.3 - Equations matricielles

Nous appellerons $\delta q_s = q_s - q_{sN} = q_s - 1000$

Comme nous prenons comme vecteur de commande $\underline{u} = \begin{bmatrix} \dot{q}_c \\ \dot{q}_d \end{bmatrix}$, nous aurons comme vecteur d'état :

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} p_b \\ q_c \\ t_s \\ x_3 \\ q_d \\ f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad \text{et comme vecteur de sortie} \quad \underline{y} = \begin{bmatrix} p_s \\ t_s \\ f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$



Estimation

Simulation

On pourra donc mettre le système sous la forme :

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0. & 0.0003306 & 0. & 0. & 0.00003026 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0.004884 & -0.02737 & 1. & -0.00206 & 0. & 0. \\ 0. & 0.0001715 & -0.0001324 & 0. & -0.00008945 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ -1. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & -1. & 0. & 0. & 0. & 0. \end{bmatrix} \underline{x}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 1. & 0. \\ 0. & 0. \\ 0. & 0. \\ 0. & 1. \\ 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.02648 - 0.00003026 \delta_{q_S} \\ 0. \\ -0.2604 - 0.001463 \delta_{q_S} \\ -0.008062 - 0.000006514 \delta_{q_S} \\ 0. \\ 1.252 + 0.00188 \delta_{q_S} \\ 0. \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} 1. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 1. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 1. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 1. \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} -1.252 - 0.00188 \delta_{q_S} \\ 0. \\ 0. \\ 0. \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

et le critère pourra s'écrire :

$$J = \frac{1}{2} \int_t^{t+600} ((-\underline{y})^T \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix} (-\underline{y}) + \underline{u}^T \begin{bmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 30 \end{bmatrix} \underline{u}) d\tau \quad (4.10)$$

3 - SOLUTION GLOBALE OPTIMALE

Nous disposons donc d'un système du type :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A \underline{x} + B \underline{u} + \underline{w} \\ \underline{y} = C \underline{x} + \underline{v} \end{cases}$$

avec le critère : $J = \frac{1}{2} \int_t^{t+T} (\underline{e}^T Q \underline{e} + \underline{u}^T R \underline{u}) d\tau$

* par exemple : $-b_{12} q_{cN} - b_{22} q_{dN} = -0.2604$

La commande sera donc :

$$\underline{u} = - R^{-1} B^T (K \underline{x} - \underline{g})$$

3.1 - Calcul des termes constants de la commande

Une des critiques que l'on peut formuler à l'égard de la commande optimale quadratique en présence de perturbations sur l'état et la sortie est que nous sommes obligés de définir une commande qui dépend d'un terme en boucle ouverte que nous avons appelé $\underline{g}$. Comme nous l'avons vu aux chapitres 1 et 3, celui-ci est toujours de la forme (équations 1.19 et 3.12) :

$$\underline{g} = G(\underline{z} - \underline{v}) + H \underline{w}$$

Donc $\underline{g}$ ne dépend que des perturbations supposées connues $\underline{w}$ et $\underline{v}$ et de la consigne $\underline{z}$. Si nous examinons les expressions de ces perturbations (équations 4.8 et 4.9), nous constatons qu'elles sont constituées par des termes constants et des termes en δ_{q_s} . Or, les termes constants ne dépendent que du régime nominal du système au moment de l'identification. Appelons les $\underline{w}_0$ et $\underline{v}_0$. Mais au démarrage du processus, le régime permanent peut très bien avoir changé. Les termes constants du vecteur $\underline{g}$ calculés hors ligne sont alors faux et auraient besoin d'être réajustés.

Les commandes que nous avons choisies vont nous permettre de résoudre ce problème. En effet, elles représentent les dérivées des débits de combustible et d'eau et par conséquent doivent être nulles en régime permanent.

On devra donc avoir en régime permanent : $\underline{u}_N = 0$

$$\text{Soit : } -R^{-1} B^T (K \underline{x}_N - (\underline{g}_N + \underline{g}_2 \delta_{q_{sN}})) = 0$$

Avant de démarrer la régulation en boucle fermée, il suffit donc d'amener manuellement le système en régime permanent, de lire la valeur de la commande et de calculer le vecteur $\underline{g}_N$ constitué pour les termes constants du vecteur $\underline{g}$ de façon à annuler cette commande :

$$\underline{g}_N^T = [G_1 \ G_2]$$

Les coefficients $\underline{g}_2$ de δ_{q_s} seront donc calculés hors ligne et $\underline{g}_N$ sera calculé en ligne juste avant le bouclage de la régulation, ce qui est analogue au passage de la commande manuelle à la commande automatique sur un régulateur classique.

Nous pouvons, de plus, remarquer qu'en fait nous n'aurons qu'une valeur approchée de $\underline{g}_N$, car nous n'arriverons pratiquement jamais à un régime permanent et nominal avec une commande manuelle. Donc les intégrateurs apparaissent encore ici comme une nécessité puisque dès le démarrage

nous introduisons des causes d'écarts permanents en plus de celles citées au chapitre 3.

3.2 - Solution globale optimale

La matrice K est calculée hors ligne. C'est le régime permanent de l'équation de Riccati définie par la formule (3.10). On obtient :

$$K = \begin{vmatrix} 0.3951E+05 & 0.9142E+02 & -0.6480E+03 & -0.3526E+05 & -0.1674E+03 & -0.5985E+03 & 0.2302E+02 \\ 0.9142E+02 & 0.2697E+01 & 0.1101E+02 & 0.2478E+03 & -0.5618E+00 & -0.1233E+01 & -0.4526E+00 \\ -0.6480E+03 & 0.1101E+02 & 0.1532E+03 & 0.2822E+04 & -0.7849E+01 & 0.9638E+01 & -0.7116E+01 \\ -0.3526E+05 & 0.2478E+03 & 0.2822E+04 & 0.8918E+05 & -0.3285E+03 & 0.4304E+03 & -0.1126E+03 \\ 0.1674E+03 & -0.5618E+00 & -0.7849E+01 & -0.3285E+03 & 0.1649E+01 & -0.1810E+01 & 0.3083E+00 \\ -0.5985E+03 & -0.1233E+01 & 0.9683E+01 & 0.4304E+03 & -0.1810E+01 & 0.1386E+02 & -0.3418E+00 \\ 0.2302E+02 & -0.4526E+00 & -0.7116E+01 & -0.1126E+03 & 0.3083E+00 & -0.3418E+00 & 0.4565E+00 \end{vmatrix}$$

Pour calculer les coefficients des termes en δ_{q_s} , nous cherchons le régime permanent de l'équation différentielle (3.11) et nous obtenons :

$$g_2 \delta_{q_s} = \begin{vmatrix} 0.5299E+02 \\ 0.6541E+00 \\ 0.2501E+01 \\ 0.3584E+02 \\ 0.6221E-02 \\ -0.8549E+00 \\ -0.1067E+00 \end{vmatrix} \delta_{q_s}$$

Ceci nous permet d'obtenir les commandes u_1 et u_2 en fonction de tous les états :

$$u_1 = \frac{1}{30} \left| -91.42p_b - 2.697q_c - 11.01t_s - 247.8x_3 + 0.5618q_d + 1.233f_1 + 0.4526f_2 \right. \\ \left. + 0.6541 \delta_{q_s} \right| + G_1 \quad (4.11)$$

$$u_2 = \frac{1}{30} \left| -167.4p_b + 0.5618q_c + 7.849t_s + 328.5x_3 - 1.649 q_d + 1.81f_1 - 0.3083f_2 \right. \\ \left. + 0.006221 \delta_{q_s} \right| + G_2 \quad (4.12)$$

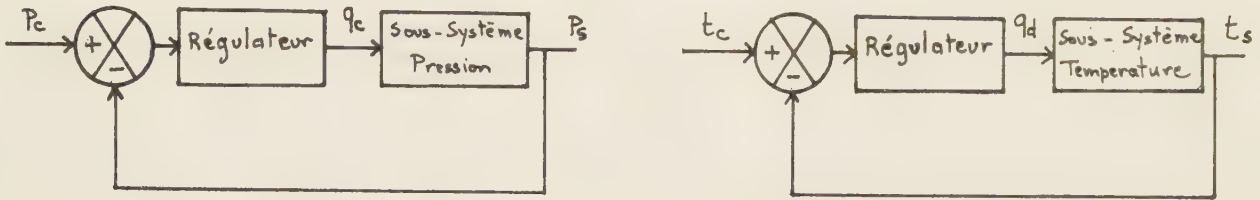
G_1 et G_2 étant les termes constants des deux commandes calculés en ligne comme nous l'avons indiqué au paragraphe 3.1.

Tous les états apparaissant dans les deux commandes, un manque d'information sur un état ne permettra pas de maintenir une régulation correcte et nous serons donc obligés de commuter sur une autre structure.

4 - DECOMPOSITION

4.1 - Principe

Nous voulons nous rapprocher des méthodes classiques de régulation monovariable. Pour cela, nous décomposerons le système en deux sous-systèmes de façon à ne commander la pression qu'à l'aide du débit de combustible et la température avec seulement le débit d'eau de désurchauffe :



Le vecteur d'état sera décomposé en deux sous-vecteurs :

$$\underline{x}_1 = \begin{bmatrix} p_b \\ q_c \\ f_1 \end{bmatrix} \quad \underline{x}_2 = \begin{bmatrix} t_s \\ x_3 \\ q_d \\ f_2 \end{bmatrix}$$

de même pour le vecteur de commande $\underline{u}^T = [u_1 \quad u_2]$

L'équation d'état devient alors :

$$\begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{w}_1 \\ \underline{w}_2 \end{bmatrix}$$

Les matrices B_{12} et B_{21} étant nulles, les interactions proviennent des matrices A_{12} et A_{21} qui sont de la forme : (cf. équation 4.8 modifiée compte tenu de la nouvelle disposition de la composante f_1)

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 0. & 0. & 0.00003026 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0. & 0.004884 & 0. \\ 0. & 0.0001715 & 0. \\ 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. \end{bmatrix}$$

La matrice A_{12} nous indique que le débit d'eau de désurchauffe n'a que peu d'influence sur la pression. La régulation locale de pression sera donc presque indépendante de la régulation en température.

Par contre, la matrice A_{21} montre, comme c'était prévisible physiquement, que le débit de combustible a une grande importance sur la température. Les principales difficultés que nous pourrions rencontrer viendront donc essentiellement de ce fait.

Enfin, le critère sera décomposé comme suit :

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_t^{t+600} (\alpha^2 p_s^2 + \beta^2 f_1^2 + \delta^2 \dot{q}_c^2) d\tau$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \int_t^{t+600} (t_s^2 + \gamma^2 f_2^2 + \varepsilon^2 \dot{q}_d^2) d\tau$$

4.2 - Régulation en pression

En négligeant les interactions, on obtient le système :

$$\begin{vmatrix} \dot{p}_b \\ \dot{q}_c \\ \dot{f}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0. & 0.0003306 & 0. \\ 0. & 0. & 0. \\ -1. & 0. & 0. \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_b \\ q_c \\ f_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} u_1^* + \begin{vmatrix} -0.02648 - 0.00003026 \delta_{q_s} \\ 0. \\ 1.252 + 0.00188 \delta_{q_s} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} p_s \\ f_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 1. \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_b \\ q_c \\ f_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1.252 - 0.00188 \delta_{q_s} \\ 0. \end{vmatrix}$$

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_t^{t+600} \left(\begin{vmatrix} -p_s \\ -f_1 \end{vmatrix}^T \begin{vmatrix} 16. & 0. \\ 0. & 0.16 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -p_s \\ -f_1 \end{vmatrix} + 30 u_1^{*2} \right) d\tau$$

La matrice de réaction K est alors :

$$K = \begin{vmatrix} 0.2043E+05 & 0.1536E+03 & -0.3857E+03 \\ 0.1536E+03 & 0.1746E+01 & -0.2190E+01 \\ -0.3857E+03 & -0.2190E+01 & 0.1122E+02 \end{vmatrix}$$

Pour le calcul du vecteur $\underline{g}$, nous procèderons exactement de la même manière que dans le cas global : les coefficients des termes en δ_{q_s} sont calculés hors ligne et le terme constant de la commande est déterminé en ligne de façon que celle-ci soit nulle lorsque le système est en régime nominal.

On obtient alors la commande sous la forme :

$$u_1^* = \frac{1}{30} [-153,6 p_b - 1.746 q_c + 2,19 f_1 + 0.4487 \delta_{q_s}] + G_1^* \quad (4.13)$$

G_1^* étant déterminé en ligne immédiatement au moment du bouclage (rappelons que l'astérisque représente la commande du sous-système).

4.3 - Régulation en température

Le système est constitué par les équations :

$$\begin{vmatrix} \dot{t}_s \\ \dot{x}_3 \\ \dot{q}_d \\ \dot{f}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.02737 & 1. & -0.00206 & 0. \\ -0.0001324 & 0. & -0.00008945 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. \\ -1. & 0. & 0. & 0. \end{vmatrix} \begin{vmatrix} t_s \\ x_3 \\ q_d \\ f_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} u_2^* + \begin{vmatrix} -0.2604 - 0.001463 \delta_{q_s} \\ -0.008062 - 0.000006514 \delta_{q_s} \\ 0. \\ 0. \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} t_s \\ f_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 1. \end{vmatrix} \begin{vmatrix} t_s \\ x_3 \\ q_d \\ f_2 \end{vmatrix}$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \int_t^{t+600} \left(\begin{vmatrix} -t_s \\ -f_2 \end{vmatrix}^T \begin{vmatrix} 1. & 0. \\ 0. & 0.01 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -t_s \\ -f_2 \end{vmatrix} + 30 u_2^{*2} \right) d\tau$$

La matrice K est alors :

$$K = \begin{vmatrix} 0.2463E+03 & 0.5530E+04 & -0.1457E+02 & -0.1051E+02 \\ 0.5530E+04 & 0.1845E+06 & -0.5760E+03 & -0.2092E+03 \\ -0.1457E+02 & -0.5760E+03 & 0.2212E+01 & 0.5477E+00 \\ -0.1051E+02 & -0.2092E+03 & 0.5477E+00 & 0.5816E+00 \end{vmatrix}$$

et la commande u_2 s'écrit alors :

$$u_2^* = \frac{1}{30} | 14.57 t_s + 576 x_3 - 2.212 q_d - 0.5477 f_2 - 0.9174 \delta_{q_s} | + G_2^* \quad (4.14)$$

G_2^* étant calculé en ligne de la même façon que G_1^* pour la régulation en pression.

5 - TRANSFORMATION DU SYSTEME BOUCLE SOUS FORME DE MATRICES DE TRANSMITTANCES

Ainsi que nous l'avons vu, l'introduction d'intégrateurs sur les sorties, si elle permet de vaincre le statisme dû aux interactions considérées comme des perturbations, n'assure pas forcément un fonctionnement stable en régulation locale.

Pour étudier ce problème, nous devons donc tracer les lieux caractéristiques du système et pour ce faire, déterminer les matrices de fonctions de transfert $G(s)$ et $K(s)$ (cf. chapitre 2).

5.1 - Calcul de la matrice G(s)

Les matrices A, B et C utilisées pour ce calcul ne sont pas exactement celles définies par les équations (4.8) et (4.9). En effet, la matrice G(s) représentant le système n'a pas à faire intervenir les intégrateurs sur les sorties, lesquels feront partie du régulateur. Dans ces conditions, les matrices A, B et C seront obtenues à partir des équations (4.1), (4.2) et (4.3) sous la forme :

$$A = \begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{12} & -a_1 & 1 & b_{22} \\ 0 & b_{11} & -a_2 & 0 & b_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{avec} \quad \underline{x} = \begin{vmatrix} p_b \\ q_c \\ t_s \\ x_3 \\ q_d \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

SI - A s'écrit alors :

$$sI - A = \begin{vmatrix} s & -a & 0 & 0 & -b \\ 0 & s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_{12} & s+a_1 & -1 & -b_{22} \\ 0 & -b_{11} & +a_2 & s & -b_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s \end{vmatrix}$$

Les valeurs des différents paramètres sont définies dans le paragraphe 2.1.5 "Résultats de l'identification".

L'inverse de SI-A est calculable sous la forme :

$$(sI - A)^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{s} & \frac{a}{s^2} & 0 & 0 & \frac{b}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s b_{12} + b_{11}}{s |s(s+a_1)+a_2|} & \frac{s}{s(s+a_1)+a_2} & \frac{1}{s(s+a_1)+a_2} & \frac{s b_{22} + b_{21}}{s |s(s+a_1)+a_2|} \\ 0 & \frac{(s+a_1)b_{11} - a_2 b_{12}}{s |s(s+a_1)+a_2|} & \frac{-a_2}{s(s+a_1)+a_2} & \frac{s+a_1}{s(s+a_1)+a_2} & \frac{(s+a_1)b_{21} - b_{22}a_2}{s |s(s+a_1)+a_2|} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s} \end{vmatrix}$$

en multipliant à droite par B et à gauche par C, on obtient finalement :

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B = \begin{vmatrix} \frac{a}{s^2} & \frac{b}{s^2} \\ \frac{sb_{12}+b_{11}}{s|s(s+a_1)+a_2|} & \frac{sb_{22}+b_{21}}{s|s(s+a_1)+a_2|} \end{vmatrix} \quad (4.15)$$

Comme $a_1 = 0.02737$ et $a_2 = 0.0001324$, le polynôme caractéristique de $G(s)$ n'a pas de zéros à partie réelle positive et le système est donc stable en boucle ouverte. On devra donc avoir $p_0 = 0$.

5.2 - Calcul de la matrice de régulation $K(s)$

Nous allons exprimer les régulations locales sous forme de transmittances en s . Ainsi que nous l'avons vu au chapitre 2, nous déterminerons la matrice $M(s)$ telle que $\underline{U}(s) = M(s) \underline{Y}(s)$ en considérant que $\underline{U}(s)$ et $\underline{Y}(s)$ sont les écarts par rapport aux points de fonctionnement nominaux. Nous noterons avec un $\sim$ ces variables d'écart par rapport à une valeur nominale. Les termes constants des commandes locales s'annulent alors et, d'autre part, pour l'étude de la stabilité nous considérerons δ_{q_s} nul.

* Pour la régulation en pression, nous avons, en prenant la transformée de Laplace :

$$\tilde{u}_1^*(s) = \alpha_1 \tilde{p}_b(s) + \alpha_2 \tilde{q}_c(s) + \alpha_3 \tilde{f}_1(s)$$

$$\text{où :} \quad \alpha_1 = -\frac{153,6}{30} \quad \alpha_2 = -\frac{1,746}{30} \quad \alpha_3 = \frac{2,19}{30}$$

En nous rappelant les équations 4.5 et 4.7, il vient :

$$\tilde{u}_1^*(s) = \alpha_1 \tilde{y}_1(s) + \alpha_2 \frac{\tilde{u}_1^*(s)}{s} - \alpha_3 \frac{\tilde{y}_1(s)}{s}$$

$$\text{d'où :} \quad \frac{\tilde{u}_1^*(s)}{\tilde{y}_1(s)} = \frac{s\alpha_1 - \alpha_3}{s - \alpha_2} \quad (4.16)$$

* Pour la régulation en température :

$$\tilde{u}_2^*(s) = \beta_1 \tilde{t}_s(s) + \beta_2 \tilde{q}_d(s) + \beta_3 \tilde{x}_3(s) + \beta_4 \tilde{f}_2(s)$$

$$\text{où :} \quad \beta_1 = \frac{14.57}{30} \quad \beta_2 = \frac{-2.212}{30} \quad \beta_3 = \frac{576}{30} \quad \beta_4 = \frac{-0.5477}{30}$$

$$\begin{aligned} \text{Or : } s \tilde{x}_3(s) &= -a_2 \tilde{t}_s(s) + b_{11} \tilde{q}_c(s) + b_{21} \tilde{q}_d(s) \\ &= -a_2 \tilde{y}_2(s) + b_{11} \frac{\tilde{u}_1^*(s)}{s} + b_{21} \frac{\tilde{u}_2^*(s)}{s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où : } \tilde{u}_2^*(s) &= \beta_1 \tilde{y}_2(s) + \beta_2 \frac{\tilde{u}_2^*(s)}{s} - \beta_3 \frac{a_2}{s} \tilde{y}_2(s) + \frac{\beta_3 b_{11}}{s} \frac{\tilde{u}_1^*(s)}{s} + \frac{\beta_3 b_{21}}{s} \frac{\tilde{u}_2^*(s)}{s} \\ &\quad - \beta_4 \frac{\tilde{y}_2(s)}{s} \end{aligned}$$

et finalement en utilisant l'équation (4.16), on obtient :

$$\tilde{u}_2^*(s) = \frac{-s | -\beta_1 s + (\beta_3 a_2 + \beta_4) |}{s^2 - \beta_2 s - \beta_3 b_{21}} \tilde{y}_2(s) - \frac{\beta_3 b_{11} (\alpha_3 - s \alpha_1)}{(s - \alpha_2) (s^2 - \beta_2 s - \beta_3 b_{21})} \tilde{y}_1(s) \quad (4.17)$$

Les équations (4.16) et (4.17) fournissent les transmittances de la matrice $M(s)$. Nous avons vu au chapitre 2 que la matrice de régulation $K(s)$ est égale à $-M(s)$ d'où :

$$K(s) = \begin{vmatrix} \frac{\alpha_3 - s \alpha_1}{s - \alpha_2} & 0 \\ \frac{\beta_3 b_{11} (\alpha_3 - s \alpha_1)}{(s - \alpha_2) (s^2 - \beta_2 s - \beta_3 b_{21})} & \frac{s | -\beta_1 s + (\beta_3 a_2 + \beta_4) |}{s^2 - \beta_2 s - \beta_3 b_{21}} \end{vmatrix} \quad (4.18)$$

les paramètres α_i et β_j étant donnés par les équations (4.13) et (4.14).

Nous avons maintenant à notre disposition tous les éléments pour mettre en place notre commande hiérarchisée. Nous pouvons constater qu'au point de vue de la stabilité, bien qu'ayant affaire à un système relativement complexe, on arrive assez facilement à déterminer les matrices $G(s)$ et $K(s)$.

En ce qui concerne la commande proprement dite, nous pouvons déjà remarquer que les deux premiers objectifs de la commande hiérarchisée que nous nous étions fixés dans le chapitre 1 à savoir :

- * informations de plus en plus dépouillées lorsqu'on remonte la pyramide
- * interventions de plus en plus précises

ne seront pas respectés.

En effet, en utilisant la commande quadratique et une partition classique avec le même modèle et le même critère à tous les niveaux de la hiérarchie, on aboutit à une équation de coordination aussi compliquée que l'équation de commande globale.

Cependant, nous allons voir dans le chapitre suivant que les deux autres objectifs :

- * interventions du coordinateur moins fréquentes
- * régulations locales stables et suffisamment précises même en cas de panne

seront réalisés mais au prix de quelques difficultés.

BIBLIOGRAPHIE

- | 4-1 | J.M. PIASCO "Applications de l'identification par filtrage non linéaire"
D.E.A., E.N.S.M., Octobre 1971.
- | 4-2 | Ph. De LARMINAT "Identification par filtrage non linéaire sous-optimal"
J.M. PIASCO Journées d'Identification et de Régulation Optimale,
E.N.S.M., Juin 1971.
- | 4-3 | Y. THOMAS "Contribution à l'étude et à la mise en oeuvre d'une
régulation optimale dynamique fonctionnelle"
Thèse d'Etat, E.N.S.M., Nantes, Avril 1971.
- | 4-4 | A. ABDALLAH "Régulation quadratique optimale"
Thèse de Docteur-Ingénieur, E.N.S.M., Nantes,
Décembre 1971.

Chapitre 5

RESULTATS

1 - ORGANIGRAMME DU PROGRAMME DE COMMANDE

Le programme de commande doit permettre d'assurer 3 types de fonctionnement : commande manuelle, commande locale et commande globale.

Les commutations entre ces différentes possibilités se font grâce aux deux boutons poussoirs A et B situés sur le calculateur numérique. (voir organigramme).

1.1 - Commande Manuelle (Bouton B relaché)

Les deux débits q_c et q_d sont commandés manuellement à l'aide de potentiomètres sur le calculateur analogique.

Pendant cette phase, les termes constants des commandes G_1 , G_2 , G_1^* et G_2^* sont calculés chaque fois que parvient au calculateur numérique une interruption envoyée par la console logique.

1.2 - Commande Locale (Bouton B enfoncé, Bouton A relaché)

Le calculateur analogique est mis en fonctionnement afin de mettre en marche les régulations locales.

On n'envoie pas de coordination mais on la calcule et on appelle les termes obtenus : $H_1\emptyset$ et $H_2\emptyset$.

1.3 - Commande Globale (Boutons A et B enfoncés)

On envoie la coordination obtenue en calculant :

$$H(1) = (u_1 - u_1^*) - H_1\emptyset$$

$$H(2) = (u_2 - u_2^*) - H_2\emptyset$$

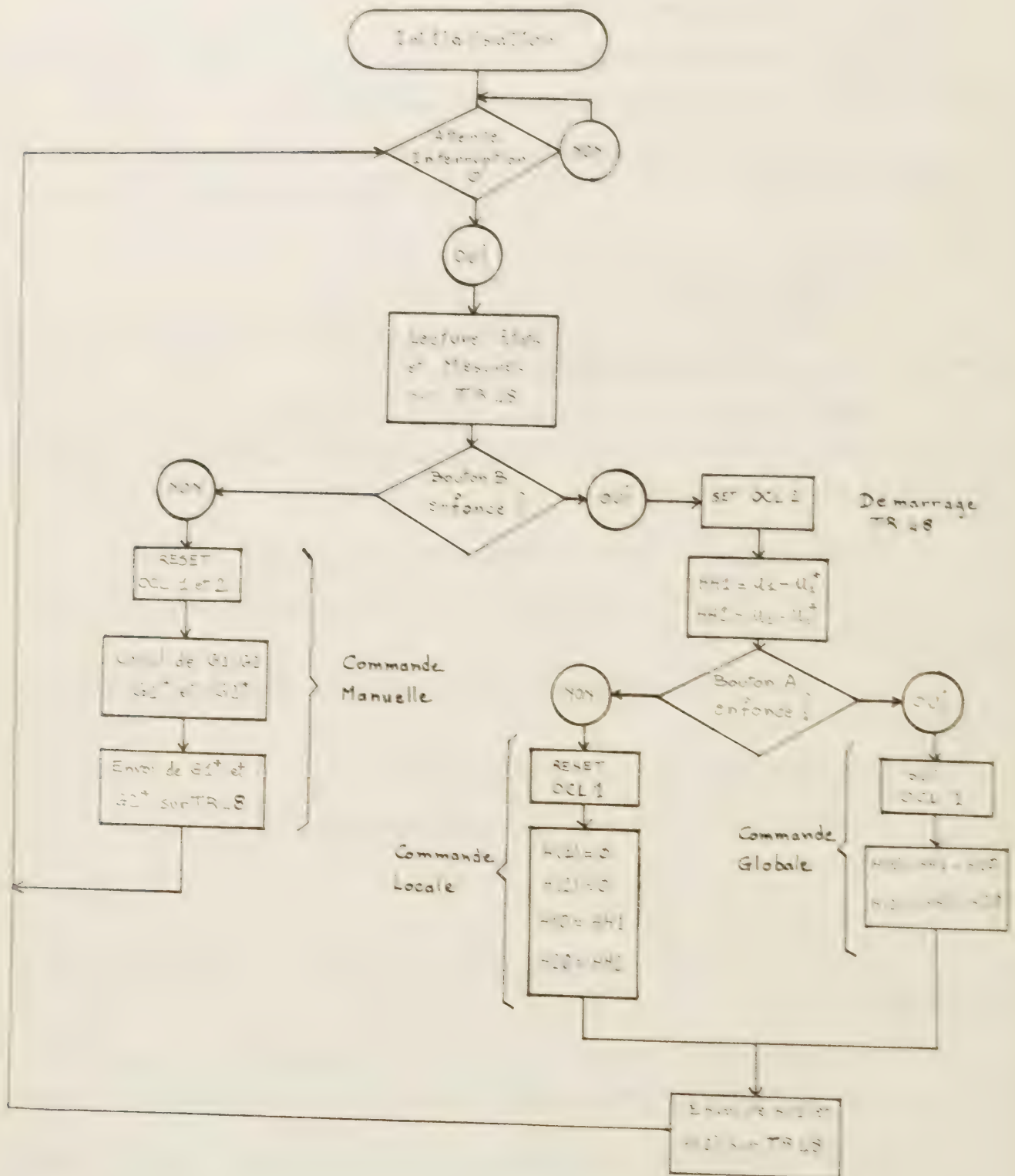
Ceci permet d'éviter les à-coups lors du passage de la régulation locale à la commande globale.

Il est important de remarquer le rôle des intégrateurs. La commande manuelle ne permettra pas forcément d'amener le processus exactement à son régime nominal.

Dans ces conditions, les termes G_1 , G_2 , G_1^* et G_2^* seront encore légèrement erronés et lorsqu'on passe en régulation globale ou locale, il faut pouvoir se ramener à ce régime nominal et ceci grâce aux intégrateurs.

De plus, les integrateurs permettront de combattre la dérive du système qui n'est pas prise en compte par l'identification.

L'organigramme du programme sera donc :



2 - COMMANDE AVEC UN INTEGRATEUR SUR CHAQUE SORTIE EN LOCAL

D'après les équations (4.13) et (4.14) les commandes locales sont :

$$u_1^* = \frac{1}{30} [-153,6 p_b - 1.746 q_c + 2.19 f_1 + 0.4487 \dot{q}_s] + C_1^*$$

$$u_2^* = \frac{1}{30} [14.57 t_s + 576 x_3 - 2.213 q_d - 0.5477 f_2 - 0.9174 \dot{q}_s] + C_2^*$$

La coordination est calculée connaissant les équations (4.11) et (4.12) donnant u_1 et u_2 en fonction de tous les états :

$$h_1 = u_1 - u_1^*$$

$$h_2 = u_2 - u_2^*$$

2.1 - Etude de la stabilité en local par la méthode de lieux caractéristiques

Pour cela nous avons tracé tout d'abord les lieux caractéristiques de la matrice $G(s) K(s)$ sur la Fig. 5.1.

Ainsi que nous l'avons vu au Chapitre 4 $p_0 = 0$.

Les deux lieux caractéristiques n'entourant pas le point $(-1, 0)$ le système en régulation locale est donc stable.

Cependant nous constatons que le lieu $q_2(j\omega)$ présente une marge de phase et une marge de gain faible, et que si le modèle a été mal identifié, le système peut très bien devenir instable.

2.2 - Essai en simulation

D'après le paragraphe précédent, les régulations locales sont stables. C'est ce que nous constatons sur la Fig. 5.2. Les temps de réponses sont relativement longs mais on ramène toujours la pression et la température exactement à leur régime nominal.

2.3 - Essai en réel

2.3.1 - Figure 5.3

Le système est amené manuellement à peu près à son régime nominal

$$p_s = 20.1 \text{ bars} \quad t_s = 299.5^\circ\text{C} \quad q_s = 1050 \text{ kg/h} \quad q_c = 80 \text{ kg/h} \quad q_d = 72 \text{ kg/h}$$

Au point (a) on démarre les régulations locales après avoir calculé C_1^* et C_2^* de telle façon que les commandes locales u_1^* et u_2^* soient nulles au départ.

On constate alors que la régulation en température est complètement instable.

2.3.2 - Figure 5.4

De la même façon que précédemment les deux chaînes sont d'abord commandées manuellement de façon à atteindre un régime permanent proche de celui de la Fig. 5.3.

Au point (b) les régulations locales sont mises en marche d'où instabilité comme précédemment.

Au point (c) la coordination démarre ce qui permet alors de ramener le système à son régime nominal.

Nous constatons donc que les intégrateurs dans les deux régulations locales, qui permettent en principe d'éviter toute erreur statique même lorsqu'on néglige les interactions introduisent en théorie une trop faible marge de stabilité pour le système bouclé et en pratique une instabilité réelle.

Les préoccupations des Chapitres 2 et 3 concernant respectivement la stabilité et la précision sont donc ici incompatibles.

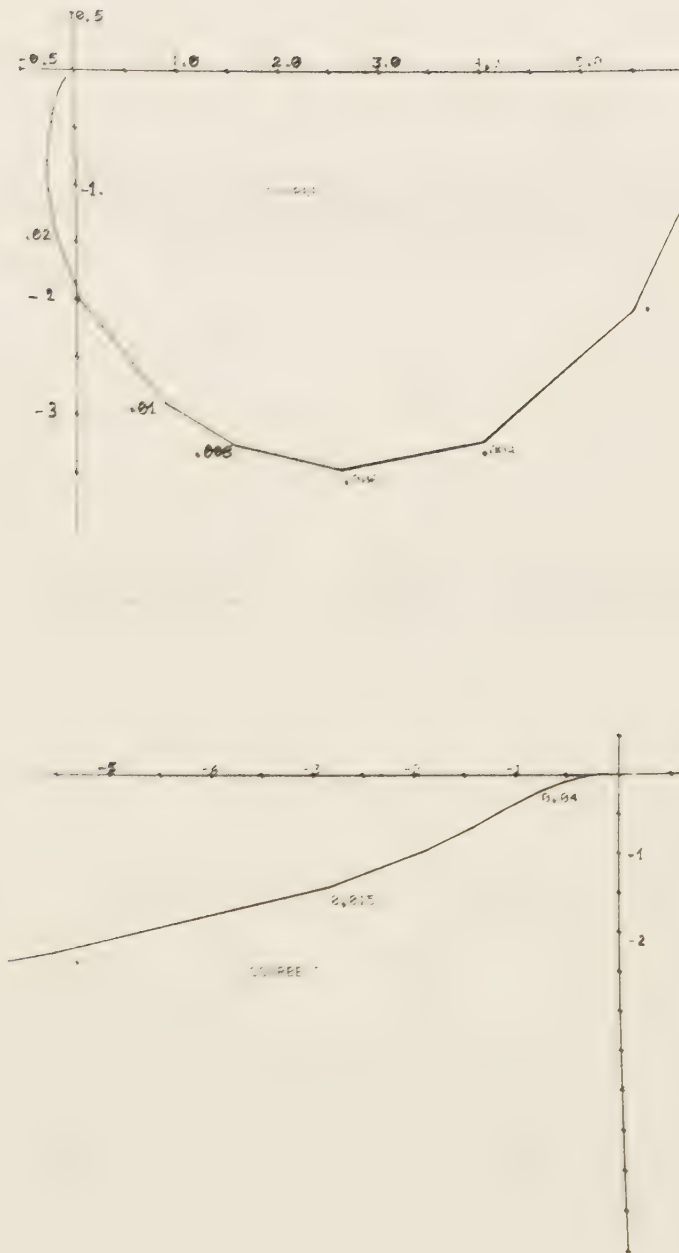


Figure 5.1

Lieux caractéristiques du système bouclé en régulation locale avec un intégrateur sur chaque sortie.

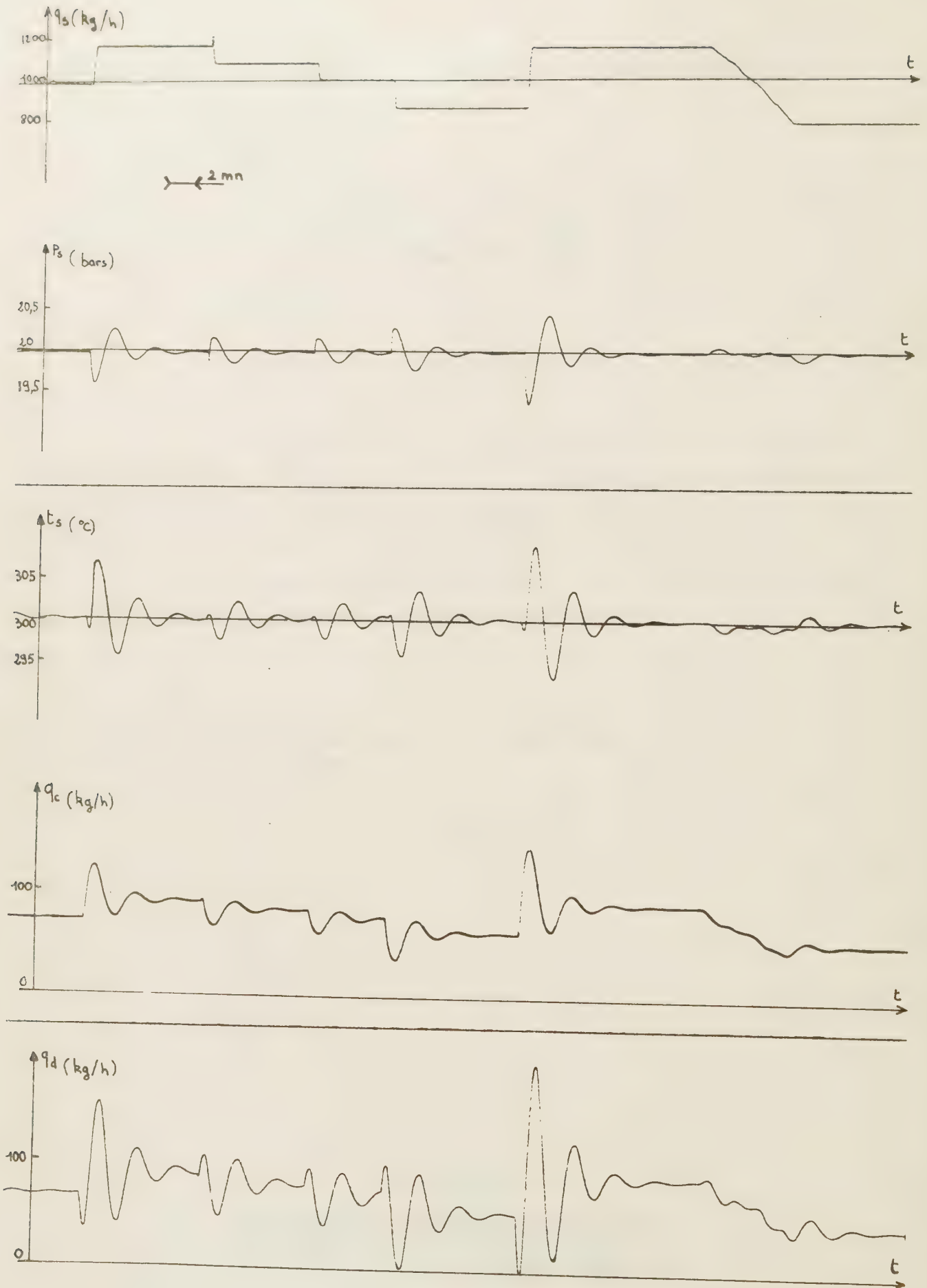


Figure 5.2

Réponses à des perturbations du débit de vapeur en régulation locale de la simulation.

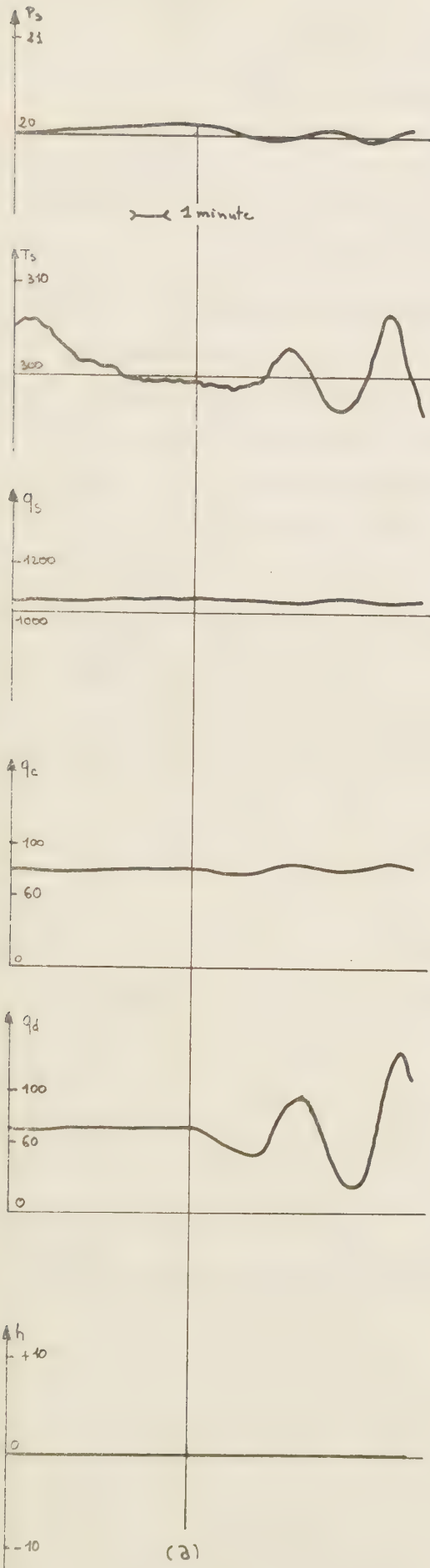


Figure 5.3

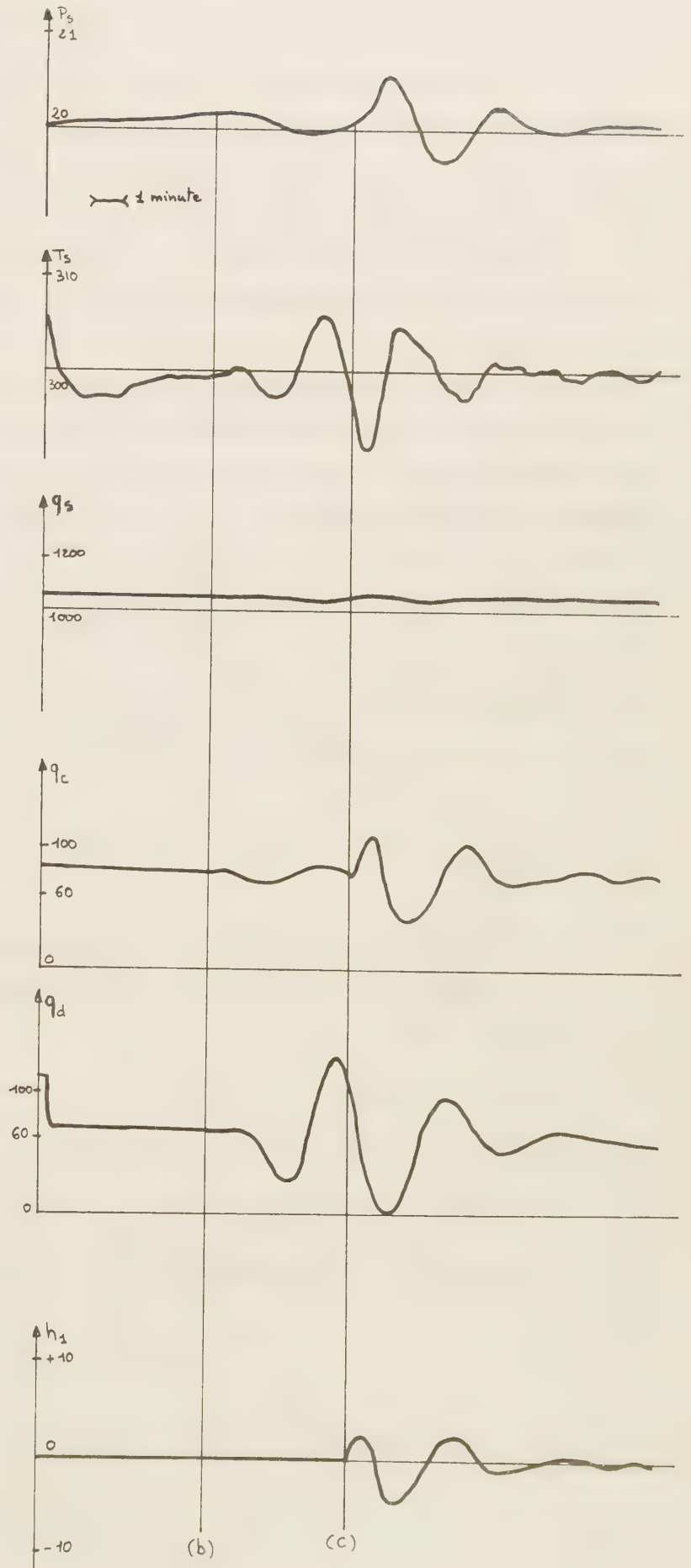


Figure 5.4

3 - COMMANDE AVEC UN INTEGRATEUR SUR UNE SEULE SORTIE EN LOCAL

En commande globale, la présence des intégrateurs n'altérant pas la stabilité, mais permettant de plus d'éviter les écarts statiques même lorsqu'on démarre dans de mauvaises conditions comme nous l'avons vu au § 2, nous conserverons ce type de commande dans tous les cas que nous allons examiner maintenant.

Pour le calcul des régulations locales, afin d'éviter l'instabilité constatée précédemment, la première idée est de supprimer un intégrateur sur une des deux sorties.

Dans ces conditions, nous n'effectuerons plus un découpage du modèle et du critère comme nous l'avons indiqué au Chapitre 1. Nous avons vu en effet sur l'exemple de notre processus pilote que cette façon systématique de procéder ne garantit finalement même pas la stabilité. Nous allons donc conserver au niveau de la coordination les intégrateurs sur les deux sorties puisque nous sommes sûrs de la stabilité en commande globale, mais au niveau des régulations locales, il est indispensable de choisir l'intégrateur que nous allons garder en utilisant la méthode des lieux caractéristiques. Mais quel que soit ce choix nous ne pouvons plus dire que les régulations locales sont obtenues en effectuant une partition du modèle et du critère utilisés pour la commande globale. Autrement dit, pour assurer la stabilité du système en local, nous sommes amenés à prendre des modèles et des critères différents pour calculer les deux types de commande.

3.1 - Intégrateur sur la pression seulement en local

La commande locale en pression est exactement la même que celle définie par l'équation (4.13) :

$$u_1^* = \frac{1}{30} \left| -153,6 p_b - 1.746 q_c + 2.19 f_1 + 0.4487 \delta q_s \right| + G_1^*$$

Mais le modèle sur lequel nous calculerons la régulation en température devient :

$$\begin{vmatrix} \dot{t}_s \\ \dot{x}_3 \\ \dot{q}_d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.02737 & 1. & -0.00206 \\ -0.0001324 & 0. & -0.00008945 \\ 0. & 0. & 0. \end{vmatrix} \begin{vmatrix} t_s \\ x_3 \\ q_d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} u_2^* + \begin{vmatrix} -0.2604-0.0001463 \delta q_s \\ -0.008062-0.000006514 \delta q_s \\ 0. \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} t_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} t_s \\ x_3 \\ q_d \end{vmatrix}$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \int_t^{t+600} (|-t_s|^T \quad |1.| \quad |-t_s| + 30 u_2^{*2}) d\tau$$

La commande est alors :

$$u_2^* = \frac{1}{30} |0.7595 t_s + 138.3 x_3 - 0.9144 q_s - 0.2482 \delta q_s| + G_2^*$$

G_2^* étant calculé en ligne de telle façon que la commande locale u_2^* soit nulle au moment où l'on passe de la commande manuelle aux régulations locales.

Les lieux caractéristiques tracés sur la Fig. 5.5 montrent qu'on est à la limite de la stabilité, donc que cette solution est a priori à éviter.

La Fig. 5.6 nous montre l'essai qui a été réalisé sur processus. Après une phase de commande manuelle jusqu'au point (a) le système passe en régulation locale . Nous constatons que nous n'avons pas un fonctionnement véritablement instable, mais que l'absence d'intégrateur sur la température empêche de combattre l'importante dérive qui apparaît sur celle-ci.

A l'instant (b) on démarre la coordination qui ramène encore ici les deux sorties à leur régime nominal sans écart permanent.

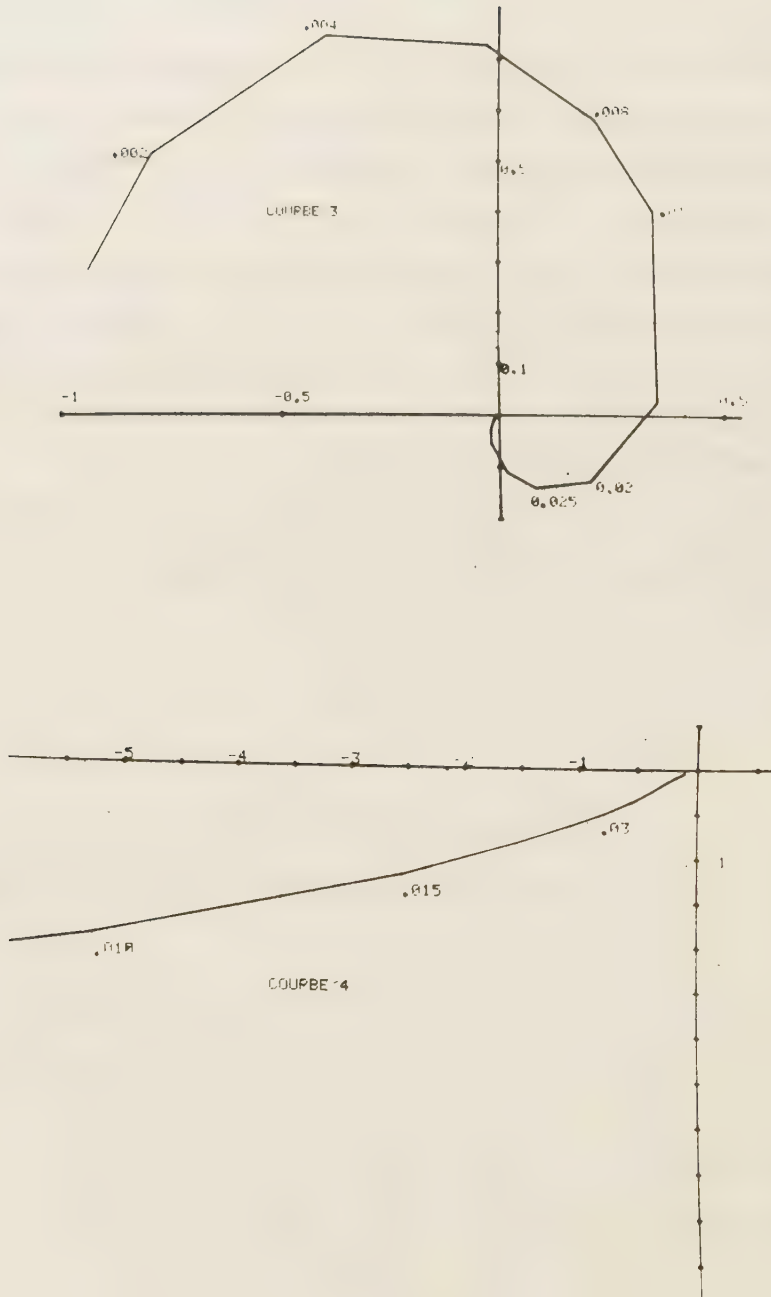
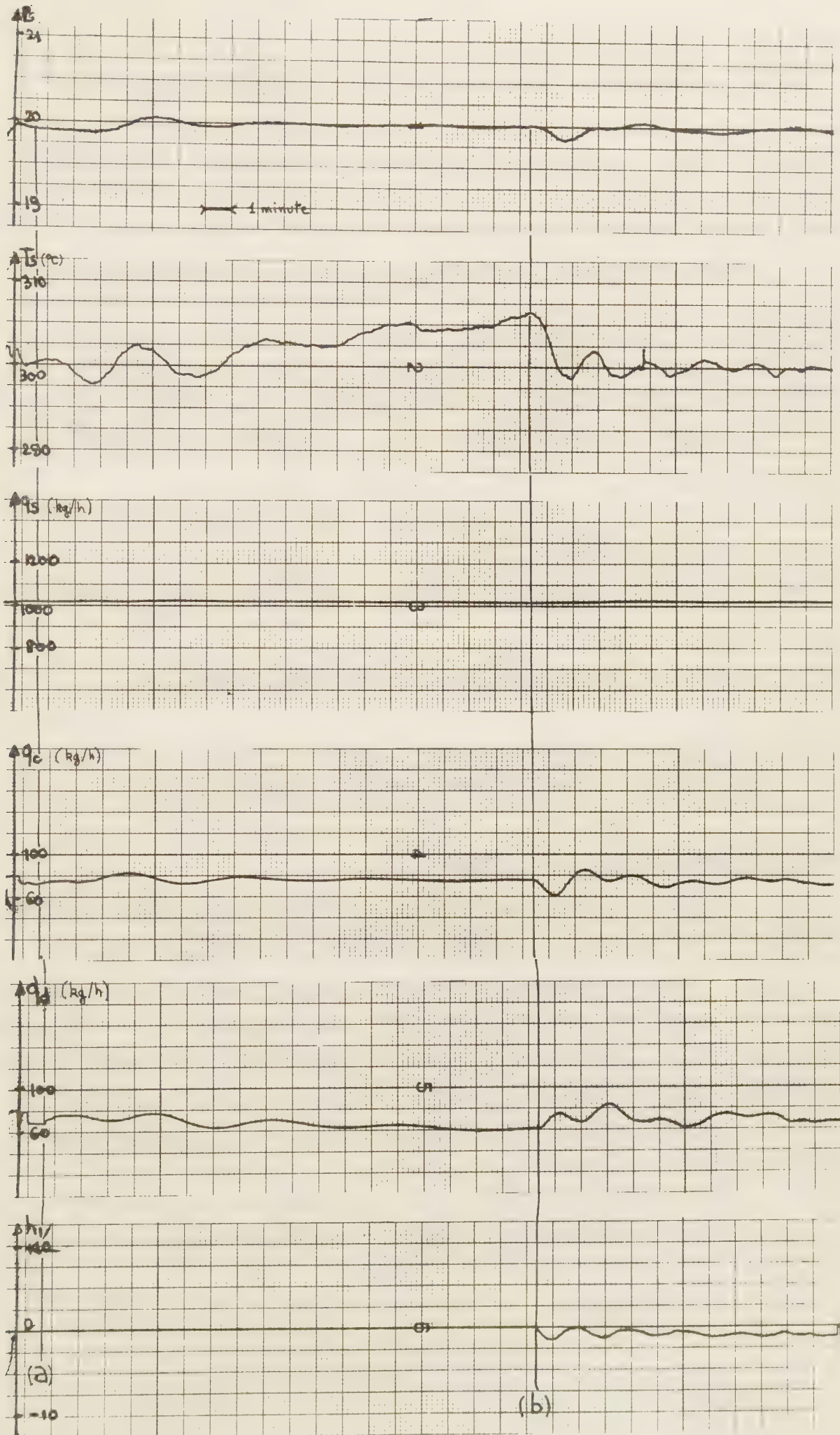


Figure 5.5
Lieux caractéristiques du système bouclé en régulation
locale avec un intégrateur seulement sur la pression



3.2 - Intégrateur sur la température seulement en local

C'est la solution qui apparaît a priori comme la plus logique car nous avons vu que le sous-système "température" présentait des interactions beaucoup plus fortes que le sous-système "pression", et nous avons donc intérêt à nous préoccuper de celle-ci en priorité en y plaçant un intégrateur.

La commande de débit d'eau de désurchauffe est définie par l'équation (4.14) :

$$u_2^* = \frac{1}{30} | 14.57 t_s + 576 x_3 - 2.213 q_d - 0.5477 f_2 - 0.9174 \delta q_s | + G_2^*$$

Le sous-système pression devient dans le cas présent :

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_b \\ \dot{q}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0. & 0.0003306 \\ 0. & 0. \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_b \\ q_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_1^* + \begin{bmatrix} -0.026484 - 0.00003026 \delta q_s \\ 0. \end{bmatrix}$$

$$|p_s| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_b \\ q_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1.252 - 0.00188 \delta q_s \end{bmatrix}$$

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_t^{t+600} (|-p_s|^T | 16. | |p_s| + 30 u_1^{*2}) dt$$

On a alors :

$$u_1^* = \frac{1}{30} | -21.9 p_b - 0.6592 q_c + 0.1015 \delta q_s | + G_1^*$$

3.2.1 - Lieux caractéristiques

Ils sont tracés sur la Fig. 5.7. Nous constatons que cette fois-ci la structure de commande est stable.

Dans ces conditions, nous avons testé l'indéfectibilité du système en construisant les lieux caractéristiques des sous-matrices principales des matrices $G(s)$ $K(s)$ et $K(s)$ $G(s)$. Ces lieux nous permettent de dire que le système est également indéfectible (Figures 5.8 et 5.9).

Cette commande atteint donc théoriquement les objectifs que nous nous étions fixés :

- fonctionnement stable en régulation locale
- fonctionnement stable en cas de défaillance d'un organe de mesure ou de commande.

3.2.2 - Essais en réel

* Figure 5-10

Démarrage du processus :

On amène manuellement le système aux alentours de son régime nominal et on met en marche les régulations locales (instant (a)). La pression présente un léger écart permanent dû à l'absence d'intégrateur, la température reste stable autour du régime nominal.

Lorsqu'une perturbation sur le débit de vapeur se produit, (instants (b) et (c)), le système reste stable et on ne constate même plus d'écart sur la pression.

* Figure 5-11

Passage de la régulation locale en commande globale (instant d)

Celui-ci se fait sous à-coups

La courbe du bas visualise la coordination envoyée sur les régulations locales pour assurer une commande globale. h_1 est d'abord visible puis h_2 .

On constate que le temps de réponse à une perturbation sur q_s (instants (e), (f) et (g)) est beaucoup plus court que dans le cas de la régulation locale.

La coordination est envoyée ici toutes les secondes.

* Figure 5-12

Coordination envoyée toutes les 10 secondes.

La réponse à une perturbation sur q_s est très légèrement dégradée, mais le fonctionnement reste très admissible.

Nous pouvons remarquer ici que l'étude de la cadence de coordination n'a été qu'esquissée à l'aide d'essais. Un développement intéressant pourrait être envisagé dans cette direction en faisant varier l'intervalle entre deux interventions du coordinateur en fonction du comportement du système. En effet, lorsque le processus est en régime permanent, les régulations locales assurent seules un fonctionnement relativement précis qui n'a besoin d'être réajusté qu'à des instants relativement éloignés. Par contre lorsque se produit une perturbation la coordination doit intervenir très souvent pour ramener rapidement le système en régime permanent. Etant donné que le critère est de la forme $\int_t^{t+T}$ on pourrait par exemple tenir compte de la dérivée de celui-ci, qui serait calculée en ligne pour modifier la période de coordination.

* Figure 5-13

Nous avons voulu tester l'indéfectibilité du système.

En régulation locale, nous avons un gel du débit de **fuel** (instant (i)). Se produit alors une perturbation dans le débit de vapeur. La régulation locale sur la température ramène celle-ci à son régime nominal pendant que la pression monte.

On passe alors en commande manuelle (instant (k)) sur le combustible pour ramener la pression à 20 bars sans se préoccuper de ce qui se passe sur la température qui revient à 300°C grâce à la régulation locale.

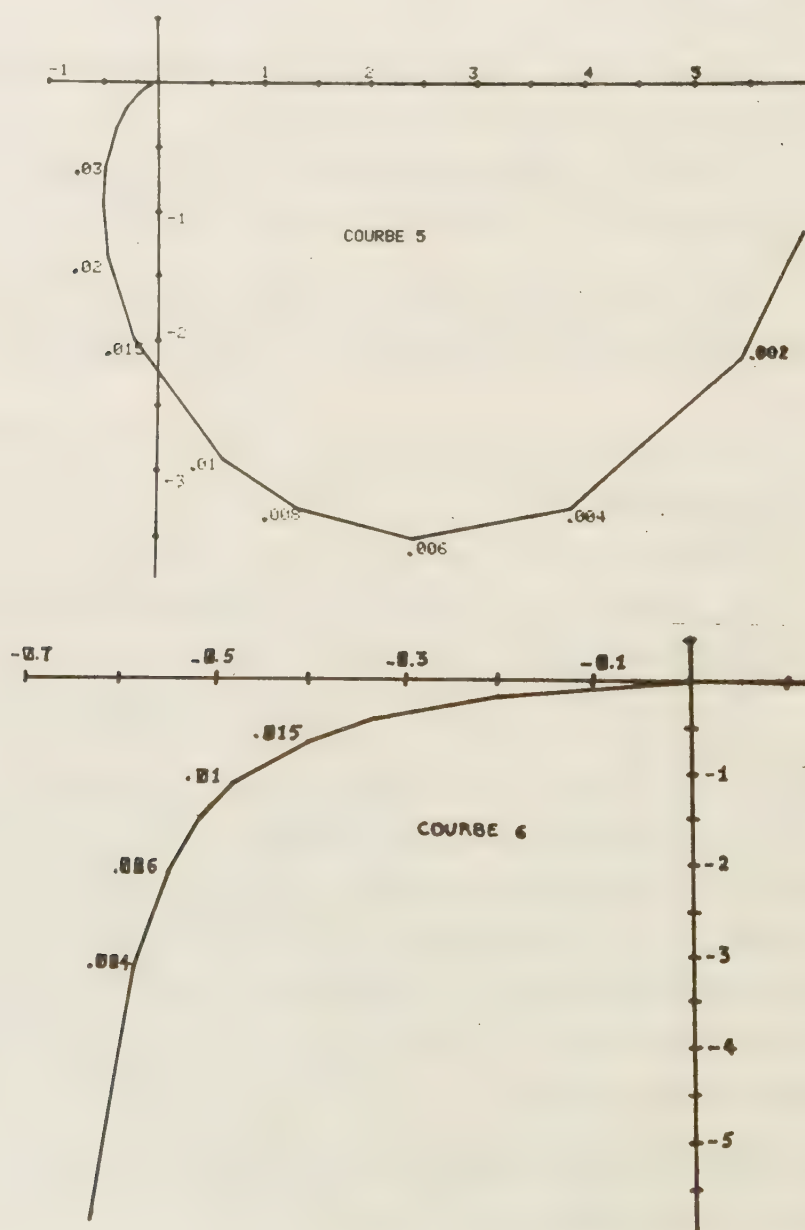


Figure 5.7

Lieux caractéristiques du système en régulation locale avec un intégrateur sur la température seulement.

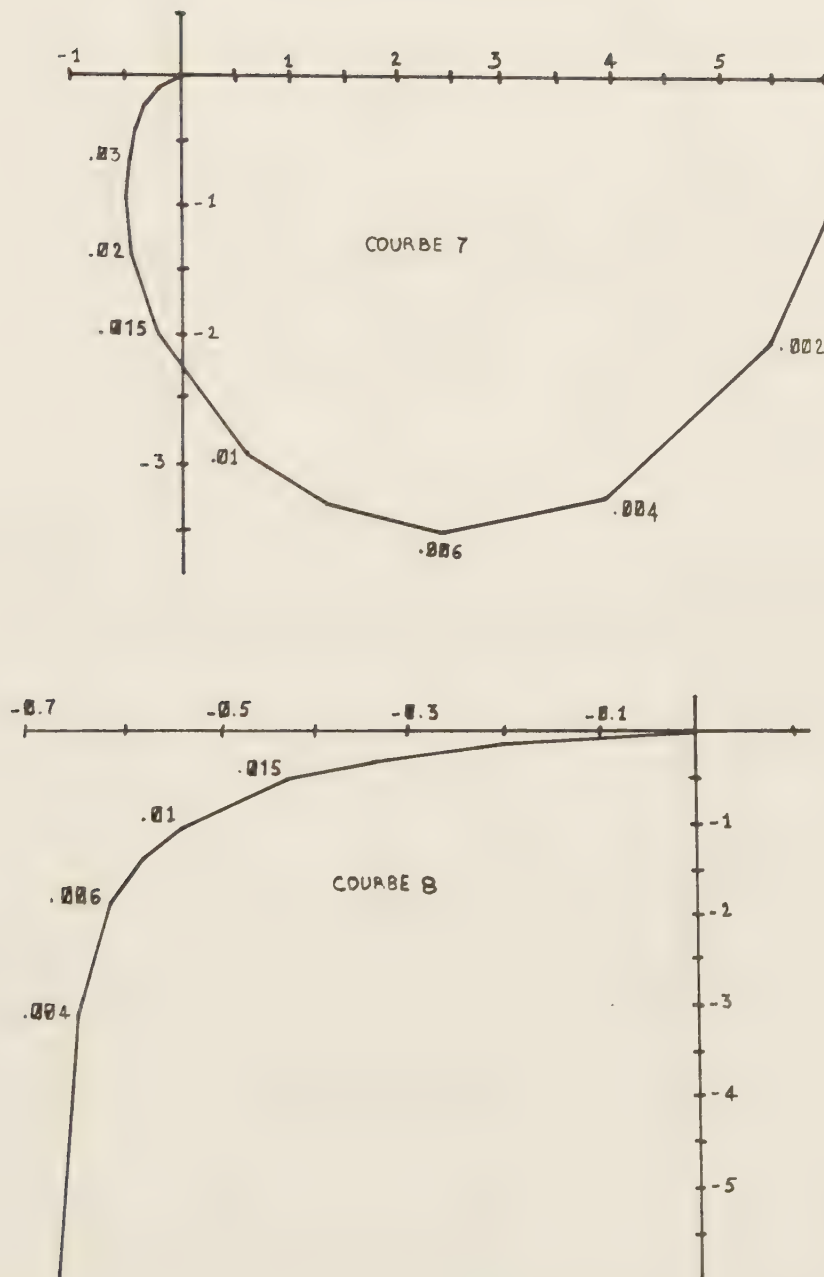


Figure 5.8
Lieux des sous-matrices principales
de $G(s)K(s)$

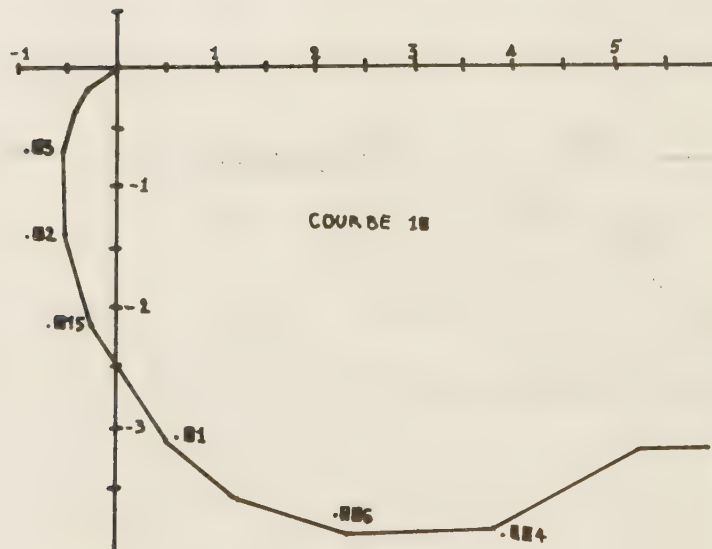
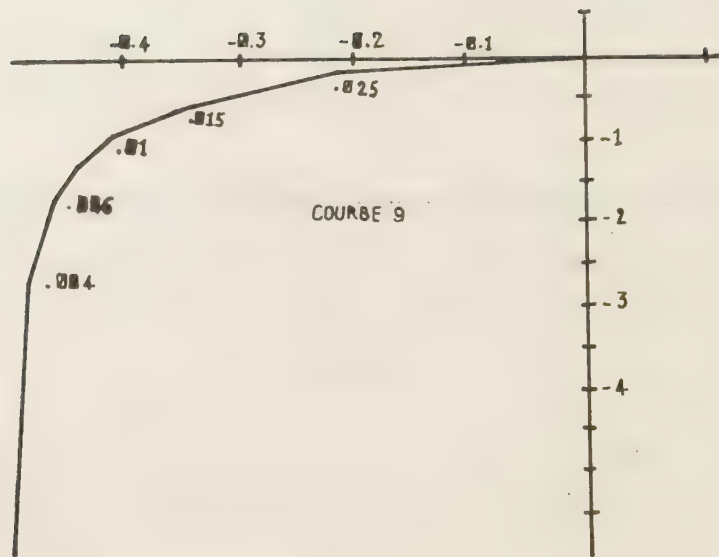


Figure 5.9

Lieux caractéristiques des sous-matrices principales de $K(s) G(s)$

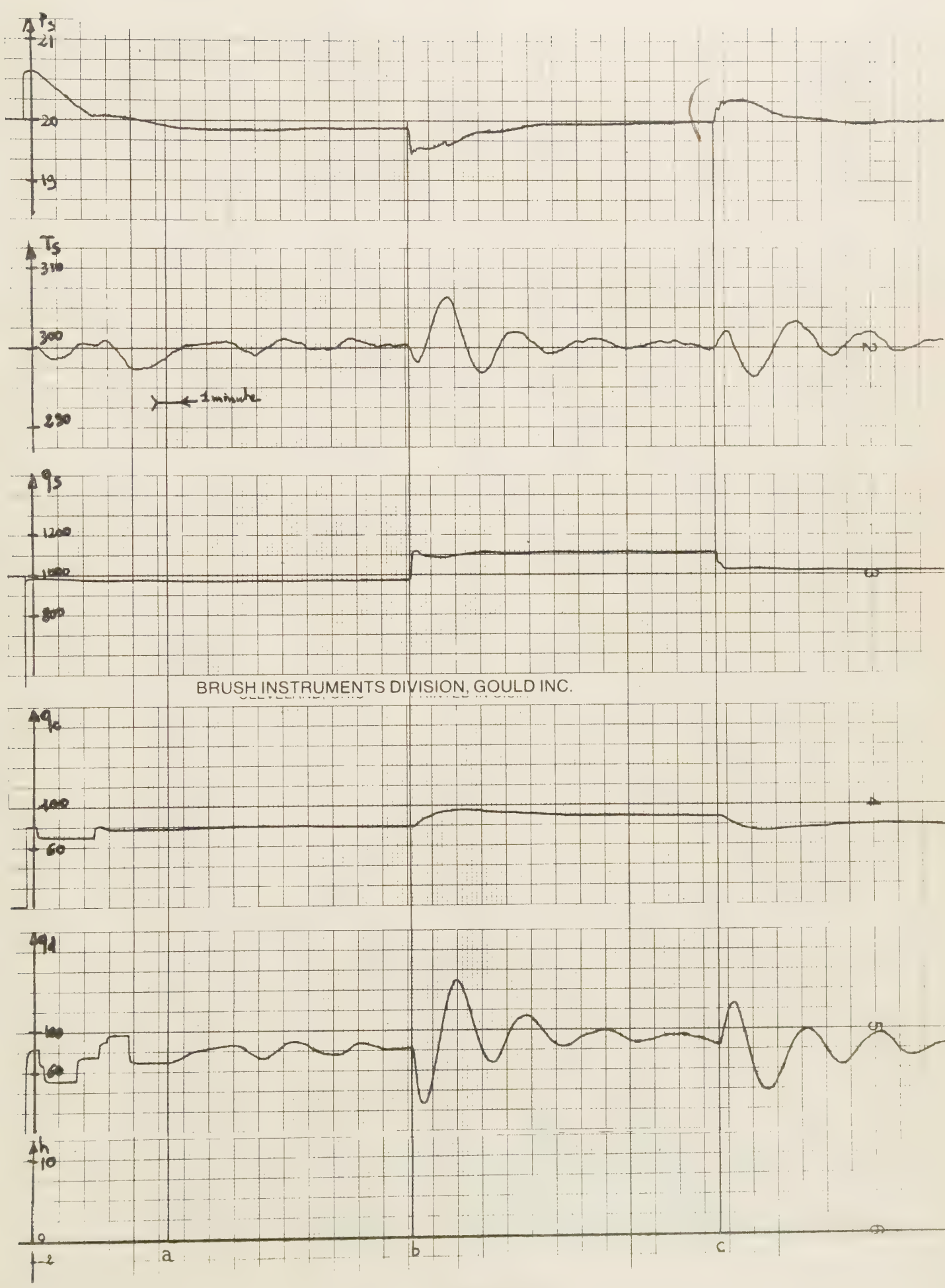


Figure 5.10

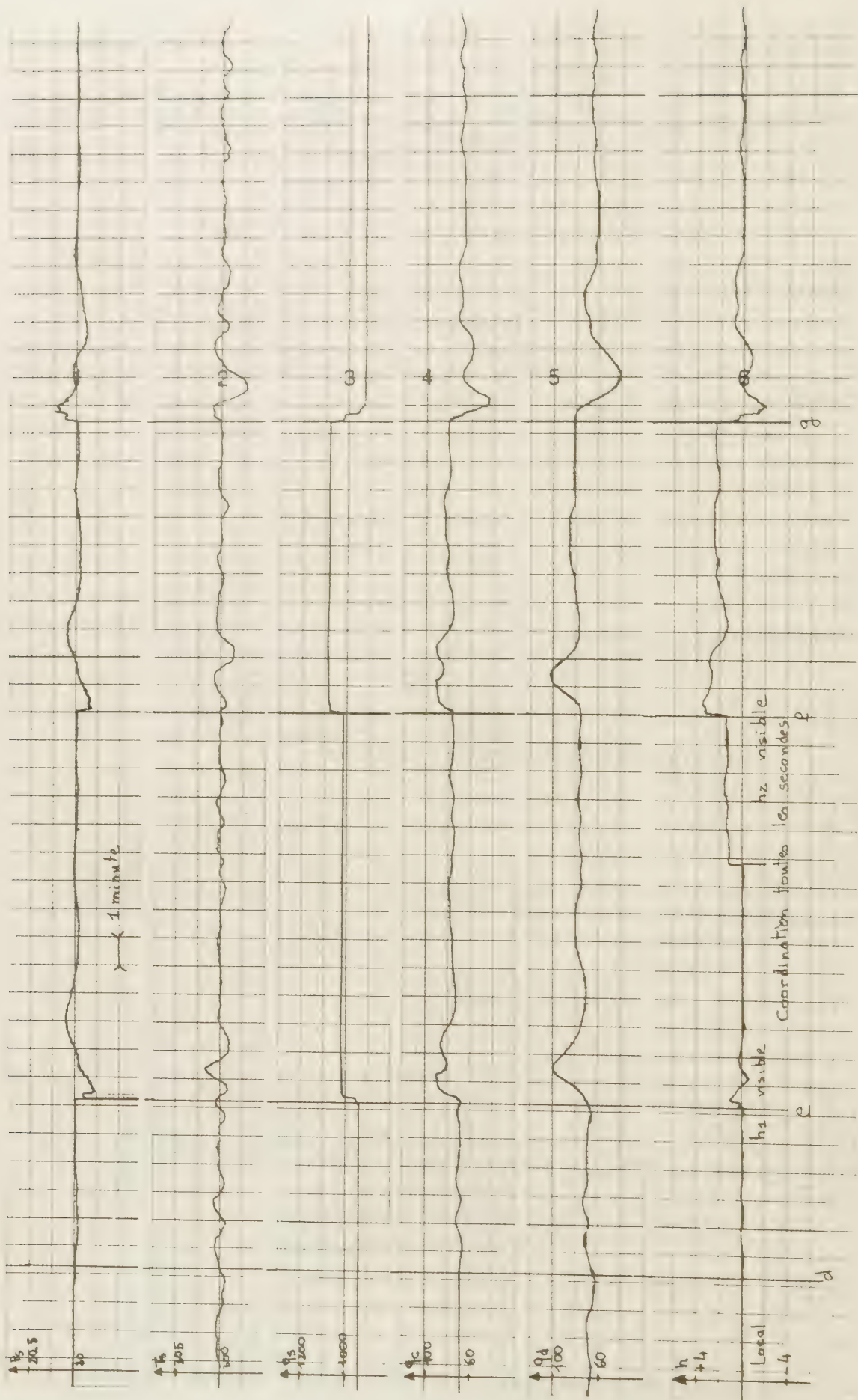
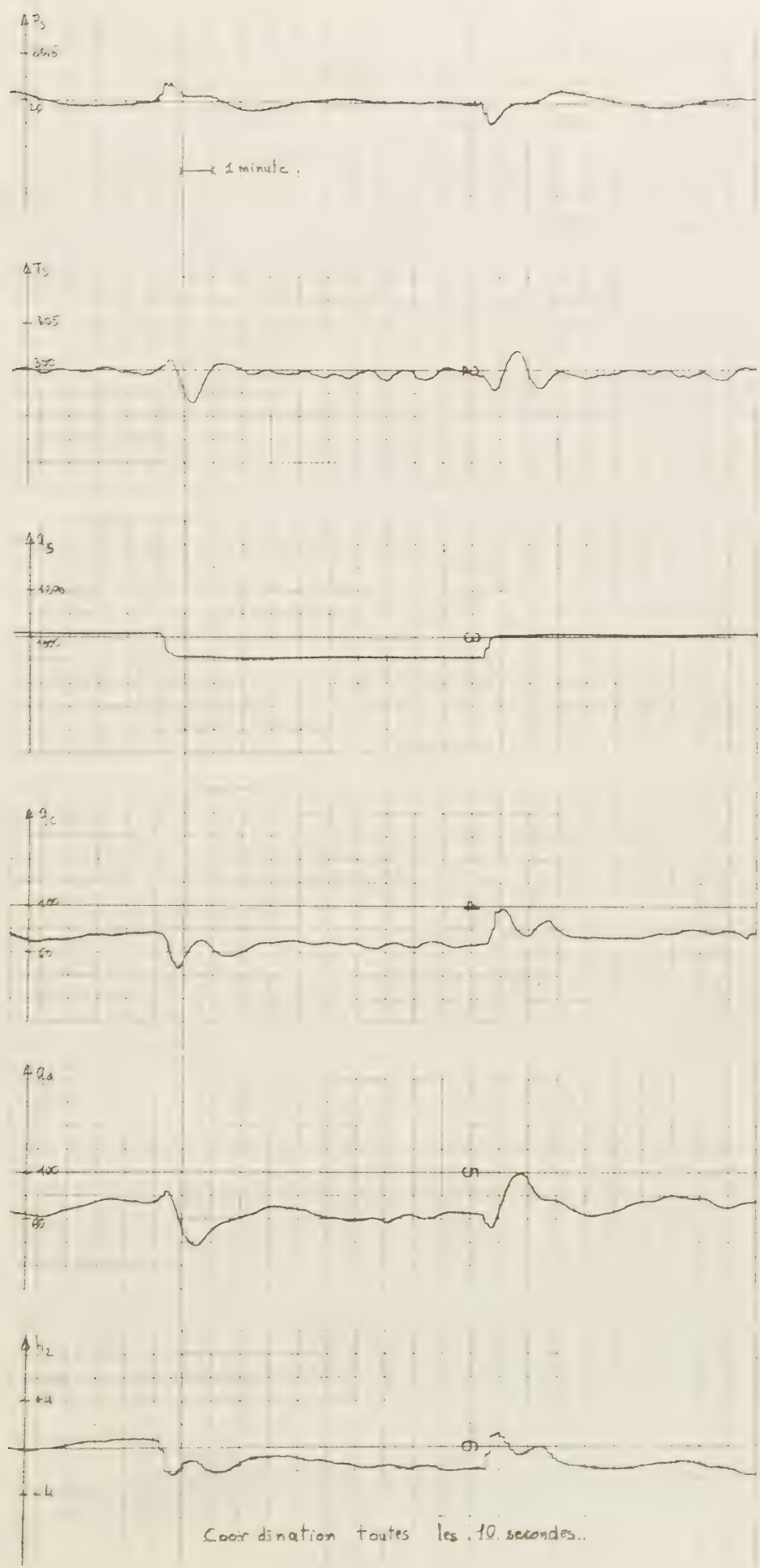


Figure 5.11



Coordination toutes les 10. secondes..

Figure 7.1

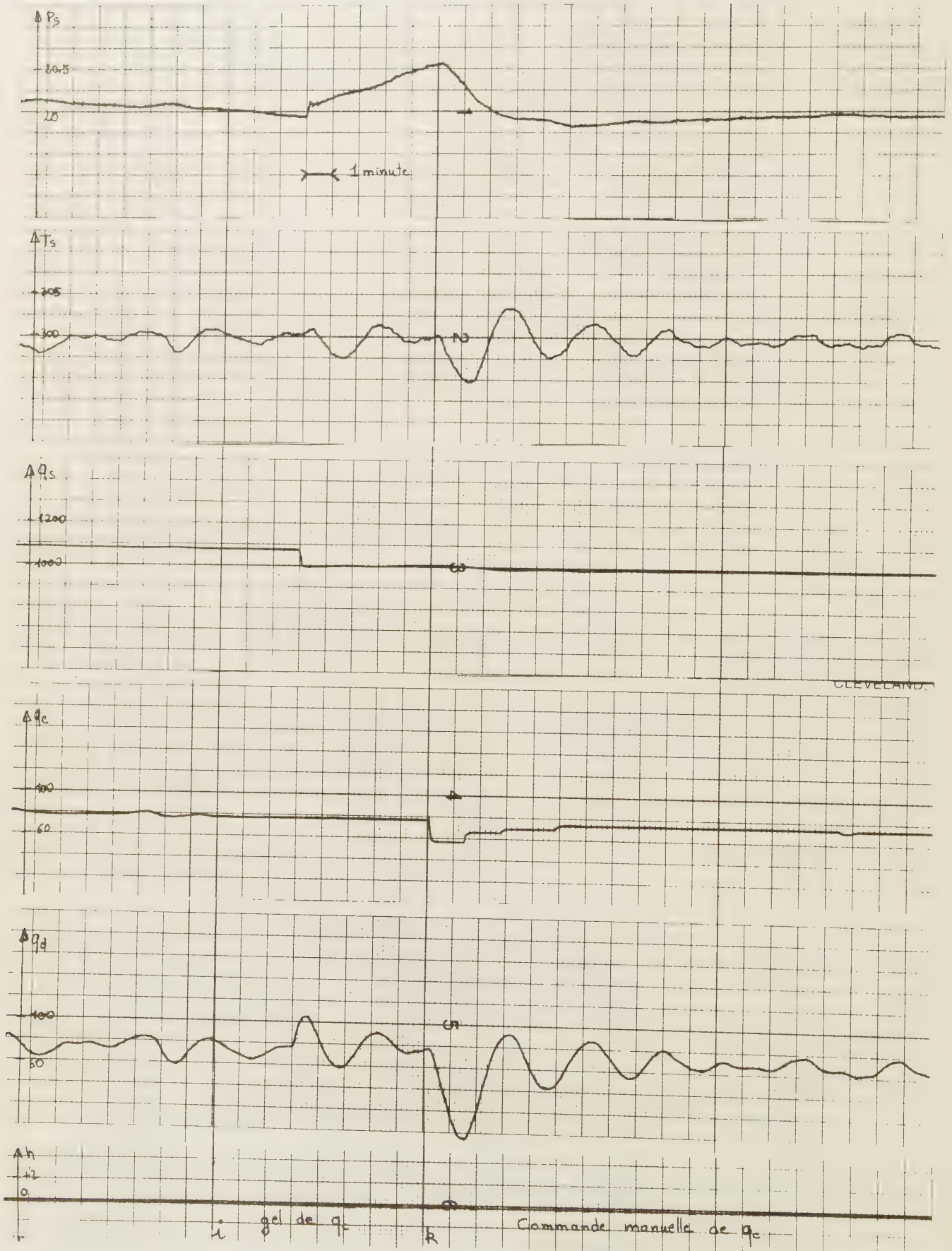


Figure 5.13

Pour conclure ce dernier chapitre, nous pouvons dire que nous avons réussi avec cette structure de commande à remplir tous les objectifs que nous nous étions fixés, notre système étant stable en régulation locale et en cas d'incident et ayant des performances équivalentes en coordination avec un système commandé globalement.

La démarche que nous avons suivie peut nous permettre de déduire un embryon de méthode pour le calcul de la commande hiérarchisée.

Le premier point qui apparaît tout de suite est qu'il n'est absolument pas indispensable d'utiliser les mêmes modèles et critères pour le premier et le second niveau et principalement dans l'introduction des intégrateurs.

Une autre démarche pourrait être la suivante :

On décompose le système en plusieurs sous-systèmes dans lesquels on néglige les interactions. De ce fait pour éviter des écarts permanents trop importants, nous introduisons des intégrateurs mais seulement sur les sorties des sous-systèmes fortement interconnectés avec les autres afin de ne pas trop diminuer le degré de stabilité. Les commandes locales sont alors calculées en utilisant l'optimisation quadratique à horizon fuyant qui permet d'avoir une matrice de bouclage constante ; et avant de mettre en place cette structure, on vérifie par la méthode des lieux caractéristiques si elle est stable et indéfectible.

Nous avons vu que cette méthode pouvait donner de bons résultats dans le cas de notre processus, mais notre démarche nous amène à faire la remarque suivante.

L'utilisation de l'optimisation quadratique au premier niveau n'apporte pas les résultats escomptés puisqu'en négligeant les interactions cette méthode de calcul ne permet pas a priori d'être sûr de la stabilité du système bouclé en local.

Dans ces conditions, il serait peut être plus profitable de chercher directement des régulations multivariables à coefficients constants qui assurent d'une part, la stabilité et d'autre part, une certaine précision. Ceci pourrait être réalisé par des méthodes reposant par exemple soit sur les travaux du Professeur Mac Farlane, soit sur la stabilisation des systèmes décentralisés $|5-1|$, $|5-2|$, $|5-3|$ ou encore en effectuant une identification plus fine du système pour la détermination des régulations du premier niveau.

BIBLIOGRAPHIE

- |5-1| M. AOKI "On feedback stabilizability of decentralised dynamic systems"
Automatica, Vol. 8, n° 2, mars 1972.
- |5-2| S.H. WANG "Of the stabilization of decentralised control systems"
E.J. DAVISON I.E.E.E. - AC-18, n° 5, octobre 1973.
- |5-3| A. WAHDAN "Contribution à l'étude des commandes décentralisées de systèmes dynamiques".
D.E.A., E.N.S.M., octobre 1974.

CONCLUSION

Nous avons voulu situer notre travail dans une optique très pratique et donc d'utilisation facile dans le cas des processus industriels. Cet effort n'est pas toujours compatible avec la théorie de l'optimalisation dynamique qui nécessite un matériel et des calculs importants qui font en général reculer les industriels. D'autre part, ceux-ci préfèrent le plus souvent conserver leurs régulations classiques qui sont à la fois faciles à mettre en oeuvre et fiables.

Il fallait donc essayer de faire le lien entre les objectifs des utilisateurs et les performances obtenues grâce à l'optimalisation. La commande hiérarchisée présente à ce point de vue bien des avantages dans son principe. En effet, son premier objectif est un souci de fiabilité qui permet de tenir compte de tous les incidents les plus probables qui peuvent se produire à l'aide de régulations proches des régulations classiques au premier niveau, tout en assurant, en fonctionnement normal, des résultats que seule la commande quadratique peut fournir.

C'est le but que nous avons recherché au cours de ces cinq chapitres.

Le premier chapitre nous a tout d'abord permis de définir la commande hiérarchisée et ses objectifs. Nous en avons principalement retenu deux : interventions peu fréquentes du coordinateur et régulations locales stables en l'absence de coordination et lorsque se produit une panne. Nous avons vu ensuite comment à l'aide de l'optimalisation quadratique nous allions résoudre le problème du calcul des commandes locales et de la coordination. Nous avons choisi la solution la plus simple qui consiste à négliger les interactions pour la détermination des régulations des sous-systèmes.

Cette façon de procéder nous a conduit dans le second chapitre à étudier la stabilité du système en régulation locale. Pour cela, nous avons utilisé une méthode fréquentielle qui est une généralisation du critère de Nyquist au cas multivariable et qui présente de plus l'avantage de savoir si le système est indéfectible, c'est-à-dire s'il reste stable en commande locale lorsque se produisent des pannes. Ce chapitre a été illustré de petits exemples simples qui permettent de comprendre facilement aussi bien l'étude de la stabilité que la détermination des régulateurs locaux.

Afin de corriger les erreurs statiques dues en grande partie aux interactions négligées, nous avons introduit dans le troisième chapitre des intégrateurs sur les sorties à raison d'un seul intégrateur par sortie au maximum. Cette méthode est, en fait, très liée avec l'étude de la stabilité car la présence des intégrateurs, si elle rend le système plus précis, diminue en même temps le degré de stabilité.

Dans les deux derniers chapitres, nous avons enfin appliqué ces différentes méthodes à la commande en ligne du générateur de vapeur du Laboratoire d'Automatique de l'E.N.S.M. décrit par une équation d'état du cinquième ordre que l'on décompose en deux sous-systèmes d'ordres deux et trois. Le calcul du coordinateur est effectué en plaçant un intégrateur sur chaque sortie (pression et température). Au niveau des régulations locales, nous avons surtout insisté sur la stabilité et l'indéfectibilité des régulations locales qui sont deux conditions indispensables à la réalisation d'une commande hiérarchisée correcte.

Nous avons vu que, compte tenu des interactions qui existaient, il n'était pas possible de mettre en commande locale un intégrateur sur les deux sorties mais seulement sur la température qui est la variable qui dépend le plus des autres états. Nous obtenons alors une commande hiérarchisée qui répond à nos exigences puisqu'elle assure un fonctionnement en toute sécurité (grâce aux régulations locales) et très performant grâce à la coordination.

Mais cette application a permis de faire apparaître un certain nombre de défauts de l'optimisation quadratique dans l'élaboration d'une commande hiérarchisée. En effet, l'utilisation d'un critère quadratique pour le calcul des régulations locales n'apporte finalement aucun avantage puisqu'il ne garantit même pas la stabilité du système. D'autre part, puisque nos équations de coordination sont aussi compliquées que dans le cas de la commande optimale quadratique, notre approche, qui a l'avantage d'assurer un fonctionnement fiable, revient aussi à compliquer la régulation.

Nous ne pouvons alors prétendre avoir obtenu un type de régulation qui puisse s'appliquer facilement aux processus industriels, mais nous pensons avoir permis de dégager les futurs axes de recherche :

- Puisqu'au niveau des régulations locales nous désirons d'un point de vue physique nous rapprocher des régulations classiques et donc commander une sortie à partir d'une entrée, il semble qu'il vaudrait mieux abandonner une décomposition simpliste et la commande optimale quadratique qui fournit des bouclages sur les états mais plutôt concevoir les commandes locales comme des bouclages sur les sorties obtenus à l'aide de méthodes du type fréquentiel

qui permettent à la fois de tenir compte des interactions et d'assurer la stabilité.

- La connaissance des bouclages locaux et donc des sorties partiellement réglées devrait permettre de déterminer un modèle global de dimension inférieure au modèle initial afin de calculer une coordination plus simple en utilisant par exemple l'optimalisation quadratique.

Nous pensons que, dans un avenir proche, ces objectifs seront atteints et permettront de réaliser de façon relativement simple et fiable une commande hiérarchisée de processus de dimensions importantes.

ANNEXE 1

1 - INTRODUCTION

Lorsqu'on représente un système multivariable à l'aide d'équations d'états, la forme la plus générale est :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{u} \\ \underline{y} = \underline{C}\underline{x} + \underline{D}\underline{u} \end{cases}$$

Ces équations peuvent être représentées par le diagramme fonctionnel :

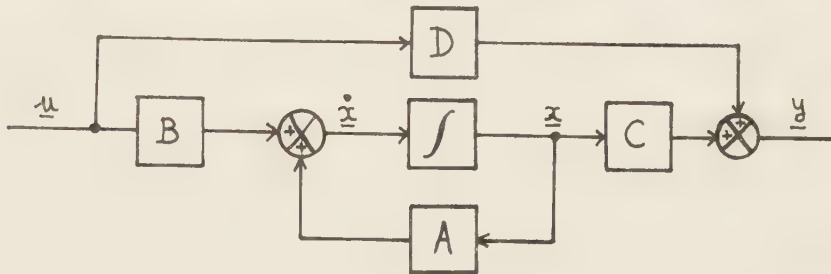


Figure 1

D'une façon plus générale, nous représenterons un système physique par le diagramme de fluences suivant :

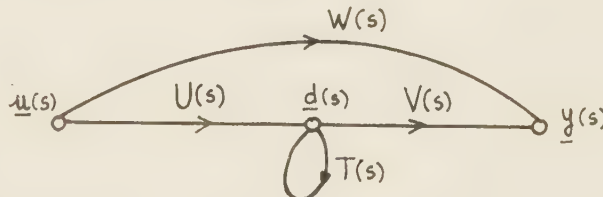


Figure 2

où $U(s)$ est la matrice d'entrée d'ordre $r \times \ell$

$V(s)$ la matrice de sortie d'ordre $m \times r$

$W(s)$ la matrice de transfert direct $m \times m$

$T(s)$ la matrice des taux de bouclage d'ordre $r \times r$

La notion de taux de bouclage peut être introduite d'un point de vue physique illustré par la Fig. 3 :

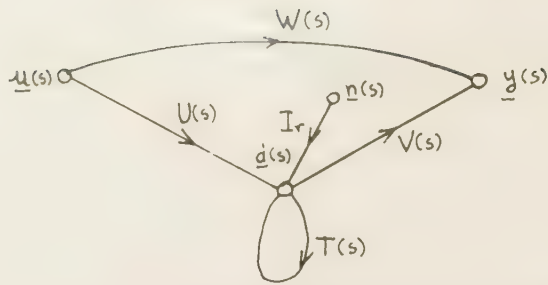


Figure 3

Supposons qu'un vecteur perturbant $\underline{n}(s)$ d'ordre r soit injecté au noeud où apparaît $\underline{d}(s)$. Si nous prenons l'entrée $\underline{u}(s)$ égale à zéro alors :

$$\underline{d}(s) = T(s) \underline{d}(s) + \underline{n}(s)$$

$$\text{d'où} \quad |I_r - T(s)| \underline{d}(s) = \underline{n}(s)$$

et en supposant que $D(s) = |I_r - T(s)|$ est non singulière pour toutes les valeurs de s , on obtient :

$$\underline{d}(s) = D^{-1}(s) \underline{n}(s)$$

$D(s)$ étant la matrice de différence de retour.

2 - MATRICE DU SYSTEME

A partir de la Fig. 3 et si maintenant nous prenons $\underline{u}(s)$ différent de zéro, on peut écrire les équations suivantes :

$$\underline{d}(s) = T(s) \underline{d}(s) + U(s) \underline{u}(s) + \underline{n}(s)$$

$$\underline{y}(s) = V(s) \underline{d}(s) + W(s) \underline{u}(s)$$

Comme nous avons posé $D(s) = I_r - T(s)$

il vient :

$$D(s) \underline{d}(s) = U(s) \underline{u}(s) + \underline{n}(s)$$

$$\underline{y}(s) = V(s) \underline{d}(s) + W(s) \underline{u}(s)$$

Système que l'on peut encore écrire sous la forme :

$$\underline{n}(s) = D(s) \underline{d}(s) - U(s) \underline{u}(s)$$

$$\underline{y}(s) = V(s) \underline{d}(s) + W(s) \underline{u}(s)$$

Ces équations peuvent être mises sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \underline{n}(s) \\ \underline{y}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D(s) & -U(s) \\ V(s) & W(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{d}(s) \\ \underline{u}(s) \end{bmatrix}$$

La matrice $P(s) = \begin{bmatrix} D(s) & -U(s) \\ V(s) & W(s) \end{bmatrix}$ est appelée matrice du système

3 - APPLICATION AU CALCUL DE $\det F(s)$

On dispose du système représenté par la Fig. 4 et on veut calculer

$$\det F(s) = \det |I + Q(s)|$$

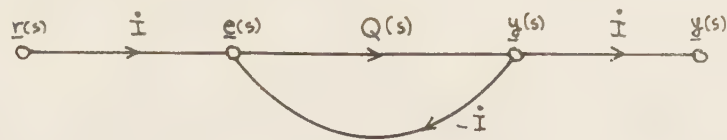


Figure 4

Considérons tout d'abord le système en boucle ouverte que nous allons décomposer comme l'indique la Fig. 5.

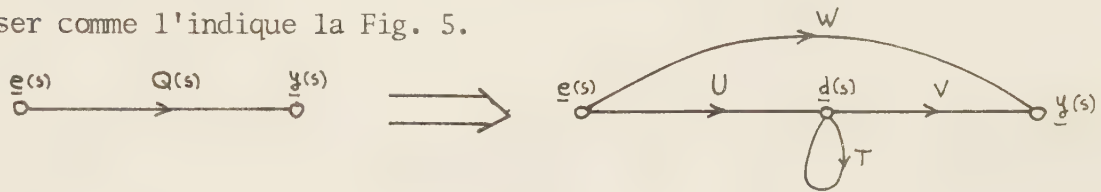


Figure 5

les matrices W , U , V et T étant des matrices de polynomes en s .

On a alors :

$$\underline{d} = T\underline{d} + U\underline{e}$$

d'où

$$\underline{d} = (I - T)^{-1} U\underline{e}$$

et si nous posons

$$\underline{D} = I - T$$

$$\underline{d} = \underline{D}^{-1} U\underline{e}$$

Dans ces conditions :

$$\begin{aligned} \underline{y} &= W\underline{e} + V\underline{d} \\ &= W\underline{e} + V\underline{D}^{-1}U\underline{e} \\ &= (W + V\underline{D}^{-1}U)\underline{e} \\ &= Q(s)\underline{e} \end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$Q(s) = W + V\underline{D}^{-1}U$$

D'autre part, le seul polynome apparaissant au dénominateur de cette expression sera le déterminant de D .

Donc le polynome caractéristique en boucle ouverte = PCBO = $\det D(s)$

Considérons maintenant le système en boucle fermée représenté par la Fig. 6.

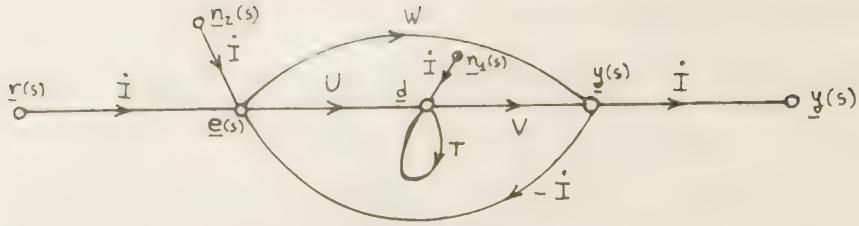


Figure 6

Afin de chercher la matrice du système, nous avons introduit aux noeuds où se forment $\underline{d}(s)$ et $\underline{e}(s)$ les vecteurs perturbants $\underline{n}_1(s)$ et $\underline{n}_2(s)$. On a alors les équations :

$$\begin{cases} \underline{d} = T\underline{d} + U\underline{e} + \underline{n}_1 \\ \underline{e} = \underline{r} - \underline{y} + \underline{n}_2 \\ \underline{y} = W\underline{e} + V\underline{d} \end{cases}$$

Si nous posons $D = I - T$ le système devient

$$\begin{cases} \underline{n}_1 = D\underline{d} - U\underline{e} \\ \underline{n}_2 = V\underline{d} + (I+W)\underline{e} - \underline{r} \\ \underline{y} = W\underline{e} + V\underline{d} \end{cases}$$

que nous pouvons encore écrire sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \underline{n}_1 \\ \underline{n}_2 \\ \underline{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & -U & 0 \\ V & I+W & -I \\ W & V & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{d} \\ \underline{e} \\ \underline{r} \end{bmatrix}$$

La matrice du système bouclé sera donc :

$$P(s) = \begin{bmatrix} D & -U & 0 \\ V & I+W & -I \\ W & V & 0 \end{bmatrix}$$

et de la même façon que nous l'avons vu pour le système en boucle ouverte le polynome caractéristique en boucle fermée = PCBF = $\det \begin{bmatrix} D & -U \\ V & I+W \end{bmatrix}$

en utilisant la formule de Schur nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \det \begin{vmatrix} D & -U \\ V & I+W \end{vmatrix} &= \det D \cdot \det [(I+W) - VD^{-1}(-U)] \\
 &= \det D \cdot \det [I + (W + VD^{-1}U)] \\
 &= \det D \cdot \det [I + Q(s)]
 \end{aligned}$$

$$\text{Or } I + Q(s) = F(s)$$

$$\text{Donc : } \det F(s) = \frac{PCBF}{PCBO}$$

Afin de démontrer le théorème d'indéfectibilité, nous noterons d'une façon générale les matrices associées aux différents types de pannes pouvant se produire :

$$\bar{Q}(s) = Q(s) \cdot S$$

où $Q(s)$ représente $Q_1(s)$ ou $Q_2(s)$ définis par les équations (2.14) et (2.15) et S est une matrice diagonale ayant ses éléments égaux à 1 pour les lignes fonctionnant normalement et à ϵ quantité arbitrairement petite pour les lignes en panne.

Dans tous les cas, pour obtenir $\bar{Q}(s)$ en multipliant $Q(s)$ par S , il faut multiplier par ϵ toutes les colonnes de $Q(s)$ correspondant aux colonnes de S contenant ϵ .

Soit P une matrice de permutation telle que $\bar{Q}(s) \cdot P$ soit une matrice ayant toutes ses colonnes où figure ϵ dans le bloc de droite.

En multipliant à gauche par P^{-1} , on obtient :

$$Q'(s) = P^{-1} \bar{Q}(s) P$$

$Q'(s)$ a toutes les colonnes où figure ϵ dans le bloc de droite et dans le bloc supérieur gauche la sous-matrice principale de $\bar{Q}(s)$ obtenue en supprimant toutes les lignes et colonnes de même numéro que les lignes et colonnes de S contenant un ϵ . Comme $\bar{Q}(s) = Q(s) \cdot S$, c'est aussi une sous-matrice principale de $Q(s)$:

$$Q'(s) = \left| \begin{array}{c|c} Q'_{11}(s) & \epsilon Q'_{12}(s) \\ \hline Q'_{21}(s) & \epsilon Q'_{22}(s) \end{array} \right|$$

$Q'_{11}(s)$ et $\epsilon Q'_{22}(s)$ matrices carrées.

Une telle transformation ne changeant pas les valeurs propres, les lieux caractéristiques des matrices $Q'(s)$ et $\bar{Q}(s)$ seront les mêmes.

L'équation caractéristique de $Q'(s)$ est :

$$\det \left| \begin{array}{c|c} Q'_{11}(s) - \lambda(s)I & \epsilon Q'_{12}(s) \\ \hline Q'_{21}(s) & \epsilon Q'_{22}(s) - \lambda(s)I \end{array} \right| = 0$$

en appliquant la formule de Schur, il vient :

$$\det |Q'_{11} - \lambda I| \times \det |(\epsilon Q'_{22} - \lambda I) - Q'_{21}(Q'_{11} - \lambda I)^{-1} \epsilon Q'_{12}| = 0$$

Faire tendre ϵ vers zéro revient à obtenir l'ensemble des valeurs propres nulles du membre de droite du déterminant. L'ensemble des valeurs propres différentes de zéro de $Q'(s)$ sera donc déterminé par :

$$\det |Q'_{11}(s) - \lambda(s) I| = 0$$

Or, $Q'_{11}(s)$ est une sous-matrice principale de $Q(s)$ obtenue en supprimant toutes les lignes et colonnes de $Q(s)$ de même numéro que les lignes et colonnes de S contenant un ϵ .

Dans ces conditions, étudier la stabilité du système en présence de pannes revient donc à étudier les lieux caractéristiques des sous-matrices principales de $Q(s)$. Ce qui permet d'énoncer le théorème :

<< Un système multivariable bouclé est indéfectible vis-à-vis de tous les cas de pannes décrits par les figures 2.4, 5 et 6 si, et seulement si, les sous-matrices principales des matrices $Q_1(s)$ et $Q_2(s)$ satisfont le critère de Nyquist défini par l'équation (2.13).>>

ANNEXE 3

On a vu qu'une condition nécessaire de commandabilité est que le nombre d'intégrateurs placés sur les sorties soit inférieur ou égal au nombre d'entrées. Le système élargi sera alors défini par les équations :

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}} \\ \dot{\underline{f}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{f} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \underline{u}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{y} \\ \underline{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{f} \end{bmatrix}$$

où T est une matrice rectangulaire dont chaque ligne est une des lignes de C.

Si nous considérons maintenant le système mono-entrée complètement commandable d'équation :

$$\dot{\underline{x}} = A \underline{x} + \underline{b} u$$

$\underline{b}$ vecteur de dimension $n \times 1$ et u commande scalaire

on peut mettre ce système sous la forme canonique associée :

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ w & w & \dots & \dots & w \end{bmatrix} \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{avec le vecteur d'état} \quad \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix}$$

les w étant des scalaires non tous nuls

On a alors :

$$\bar{A} \bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \\ w_1 \end{bmatrix} \quad \bar{A}^2 \bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \\ w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad \dots \quad \bar{A}^n \bar{b} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

les w_i étant des scalaires non tous nuls.

Nous savons que pour un système mono-entrée, on ne peut placer qu'un intégrateur sur une seule sortie. Si, par exemple, celle-ci est la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur d'état, la matrice T est alors :

$$T = e_i = |0 \dots 1 \dots 0| \text{ (i}^{\text{ème}} \text{ colonne non nulle)}$$

La matrice Q_4 de commandabilité de dimension $(n+1) \times (n+1)$ devient :

$$Q_4 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & & w_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & & & 1 & & w_{i-2} \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & w_1 & & & & w_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & -1 & \dots & -w_{i-2} & -w_{i-1} \end{array} & \begin{array}{l} (i-1)^{\text{ième}} \text{ ligne} \\ \\ \\ \\ (n+1)^{\text{ième}} \text{ ligne} \end{array} \end{array}$$

Q_4 est de rang n pour $2 \leq i \leq n$ puisque les lignes $(i-1)$ et $(n+1)$ sont égales au signe près.

Pour $i = 1$, on a $T = |1, 0, \dots, 0|$ et la dernière ligne de Q_4 devient $|0, \dots, 0, -1|$. Q_4 est donc de rang $(n+1)$ et le système est commandable.

Finalement, si la matrice T est du type : $T = |\alpha, w, \dots, w|$ où $\alpha \neq 0$ et les w sont des scalaires pouvant être nuls, le système est encore commandable car T est une combinaison linéaire des e_i ($i = 1, \dots, n$) et la dernière ligne de Q_4 reste indépendante des autres.

On peut alors énoncer la condition nécessaire et suffisante :

<< Une condition nécessaire et suffisante pour que le système mono-entrée, obtenu en plaçant un intégrateur en sortie, soit comme commandable, est que l'entrée de cet intégrateur soit linéairement dépendante de la composante d'état $\bar{x}_1$ du système de base représenté sous la forme canonique associée>>.

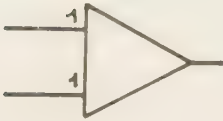
ANNEXE 4

SCHEMAS DE CABLAGE

SYMBOLES UTILISES



Inverseur



Sommateur (inversion de signe)



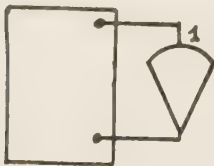
Intégrateur



Amplificateur opérationnel. En haut : entrée sur résistance. En bas : entrée sur S.J.



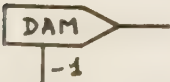
Potentiomètre



Élément non linéaire : multiplieur, extracteur de racine, élévation au carré.



Convertisseur analogique - digital



Convertisseur digital - analogique (multiplication par -1)



Entrée-sortie chaudière



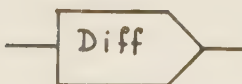
Entrée-sortie logique



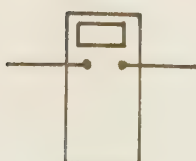
Porte logique ET



Bascule R-S

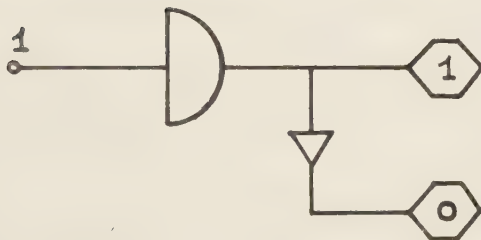
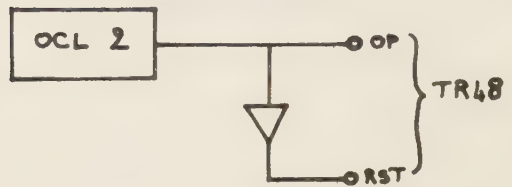
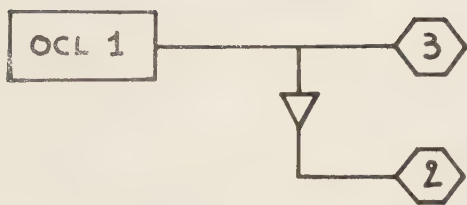
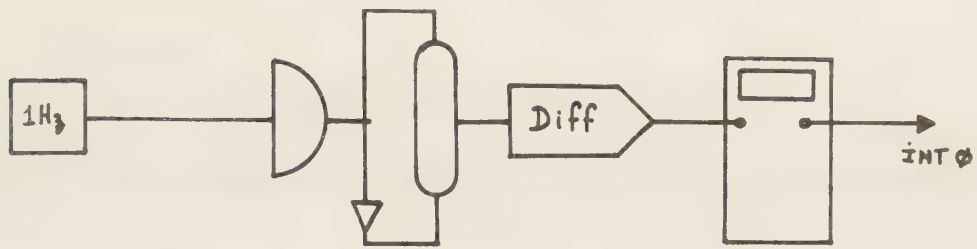


Différentiateur



Décompteur

Câblage logique



- le décompteur permet d'avoir un intervalle entre chaque interruption qui peut varier de 1 seconde à 100 secondes.
- le passage de la commande manuelle (en agissant sur les potentiomètres 23 et 24) à la commande automatique est réalisé à l'aide de l'OCL 2
- l'OCL 1 permet de mettre en marche l'intégrateur sur la pression lorsqu'on passe en commande globale avec coordination.

LABORATOIRE D'AUTOMATIQUE DE L'E.N.S.M.

AFFECTATION DES POTENTIOMÈTRES (TR-48)

DATE _____

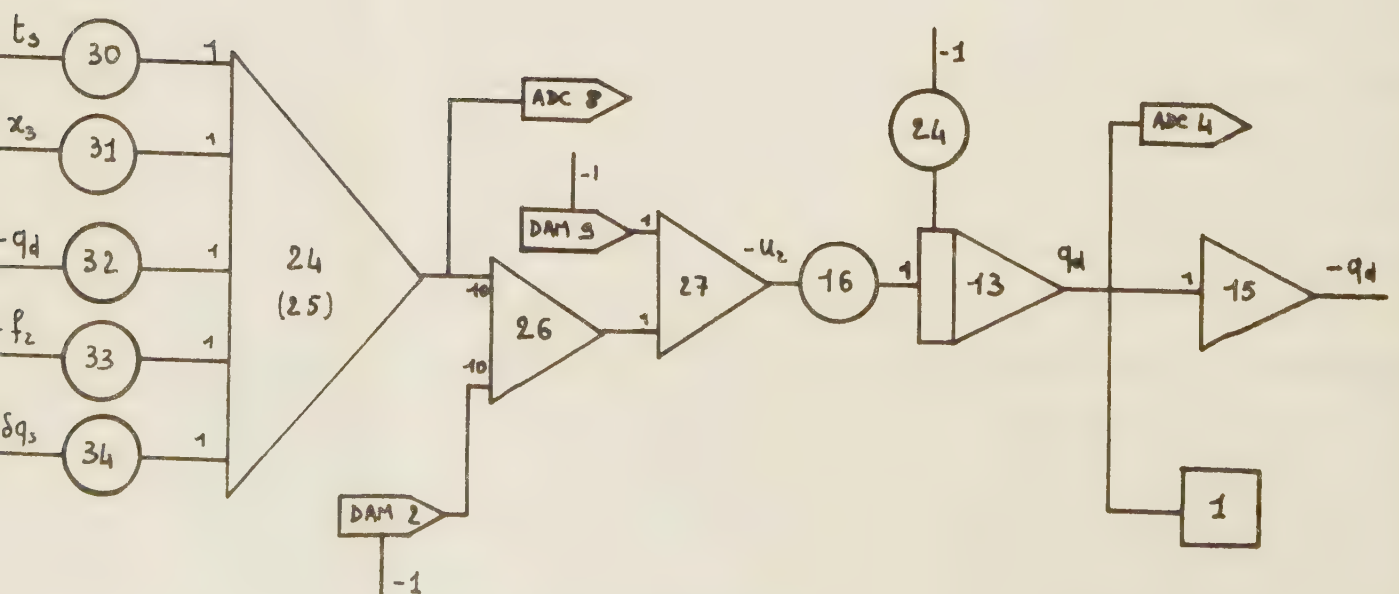
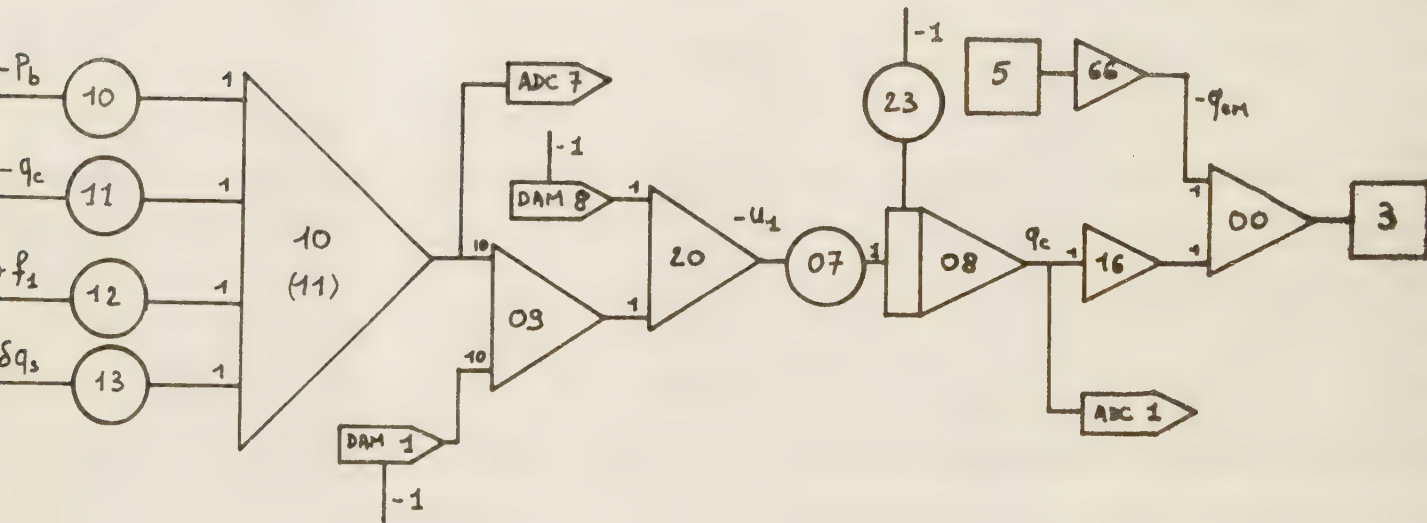
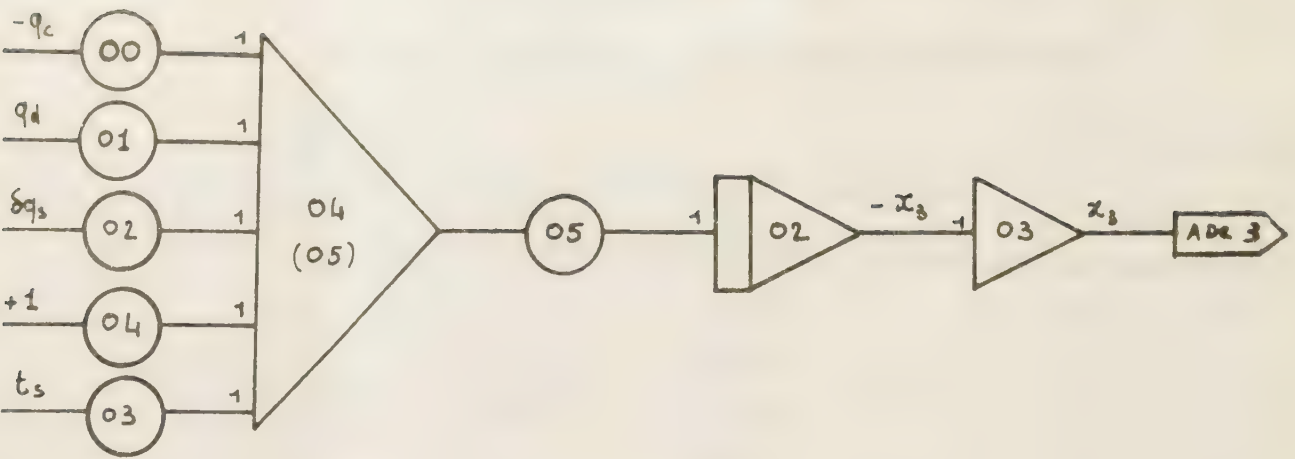
PROBLÈME _____

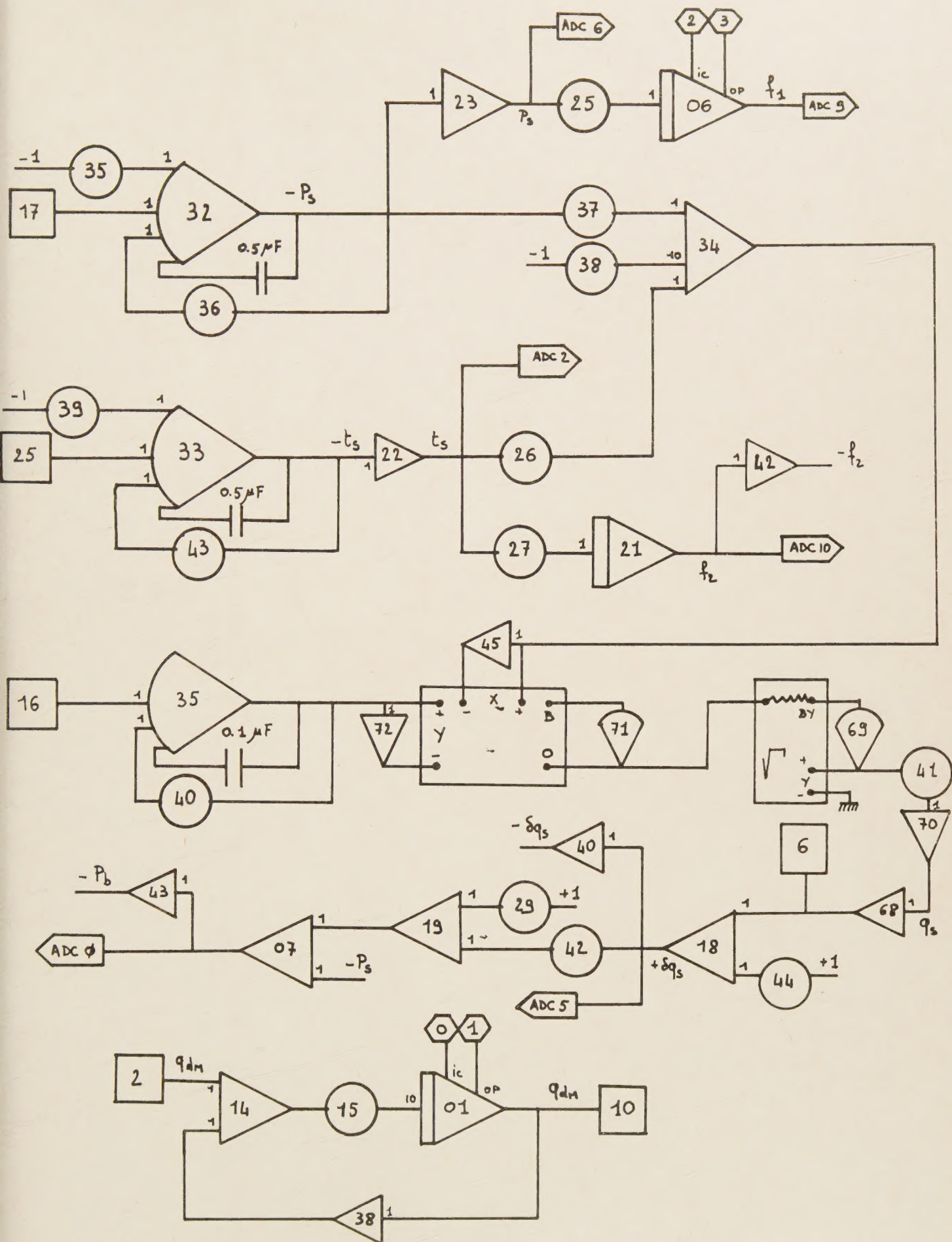
No du POT	PARAMÈTRE	VÉRIFICATION STATIQUE	VALEUR pour ESSAI No 1	VALEUR pour ESSAI No 2	VALEUR pour ESSAI No 3	NOTES
00	$\frac{D_{01} \times D_{02} \times 10}{X_{3cal}}$		0.343			
01	$\frac{D_{01} \times D_{02} \times 10}{X_{3cal}}$		0.1789			
02	$\frac{D_{01} \times D_{02} \times 10}{X_{3cal}}$		0.1303			
03	$\frac{a_2 \times t_{02} \times 10}{X_{3cal}}$		0.1324			
04	$\frac{constante \text{ sur } X_3 \times 10}{X_{3cal}}$		0.0806			
05	$\frac{1}{10}$		0.1			
07	$\frac{U_{13cal}}{I_{0cal}}$		0.05			
10	$\frac{k_{21} \times P_{bcal}}{r_{11} \times U_{1cal}}$		0.256	0.0365		Commande locale sans intégrateur sur la pression
11	$\frac{k_{22} \times q_{cal}}{r_{11} \times U_{1cal}}$		0.1164	0.044		
12	$\frac{k_{23} \times f_{1cal}}{r_{11} \times U_{1cal}}$		0.146	0.		
13	$\frac{g_1 \times S_{qcal}}{r_{11} \times U_{1cal}}$		0.2991	0.0676		
15	filtrage de q_{dm}		0.0957			
16	$\frac{U_{1cal}}{q_{dcal}}$		0.05			
23	$\frac{I_{0cal}}{I_{0cal}}$		~ 0.4			
24	$\frac{I_{0cal}}{I_{0cal}}$		~ 0.3			
25	$\frac{P_{scal}}{f_{1cal}}$		0.025			
26	Conversion grandeurs chaudière		0.1692			
27	$\frac{t_{0cal}}{t_{2cal}}$		0.025			
28						
29	$\frac{1}{I_{0cal}}$		0.2504			

DATE _____

PROBLÈME

No du POT	PARAMÈTRE	VÉRIFICATION STATIQUE	VALEUR pour ESSAI No 1	VALEUR pour ESSAI No 2	VALEUR pour ESSAI No 3	NOTES
30	$k_{24} \times t_{scal} / r_{22} \times U_{2cal}$		0.4856	0.0253		} Commande locale sans integrateur sur la temperature
31	$k_{25} \times t_{scal} / r_{22} \times U_{2cal}$		0.192	0.0461		
32	$k_{26} \times t_{scal} / r_{22} \times U_{2cal}$		0.1475	0.0603		
33	$k_{27} \times t_{scal} / r_{22} \times U_{2cal}$		0.7303	0.		
34	$g_2 \times S_{qscal} / r_{22} \times U_{2cal}$		0.6116	0.1654		
35	Conversion grandeurs chaudière		0.5223			
36	Conversion grandeurs chaudière		0.1305			
37	Conversion grandeurs chaudière		0.205			
38	Conversion grandeurs chaudière		0.078			
39	Conversion grandeurs chaudière		0.495			
40	Conversion grandeurs chaudière		0.7842			
41	Conversion grandeurs chaudière		0.9902			
42	$e \times S_{qscal} / P_{scal}$		0.752			
43	Conversion grandeurs chaudière		0.495			
44	Conversion grandeurs chaudière		0.5			





UNIVERSITY OF CHICAGO
LIBRARY

12345